Kortfattade lösningar till vissa uppgifter i Uppgiftshäfte 1

A Vektorer

2. Vi ges en relation på mängden av riktade sträckor som vi skall visa är en ekvivalensrelation, dvs att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

reflexivitet: Den riktade sträckan $\mathbf{x}$ har ju samma längd som sig själv och även samma riktning som sig själv, alltså gäller $\mathbf{x}R\mathbf{x}$.

symmetri: Om $\mathbf{x}$ har samma längd som $\mathbf{y}$ har ju $\mathbf{y}$ samma längd som $\mathbf{x}$. P.s.s. med deras riktningar.

transitivitet: Om $\mathbf{x}$ har samma riktning som $\mathbf{y}$ och $\mathbf{y}$ har samma riktning som $\mathbf{z}$, har ju $\mathbf{x}$ samma riktning som $\mathbf{z}$. P.s.s. med deras längder.

C Skalär produkt

4. Vi använder att $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$ för att se att

$$VL = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = HL - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

Detta betyder att VL=HL precis då $0 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$, d v s då $\alpha = \pi/2$.

D Vektorprodukt

3. Arean av ett parallellogram ges av $B\cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren i avsnittet i fråga (där vi nu tänker oss att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^3$) ser vi att $B = |\mathbf{u}|$ och $h = |\mathbf{v}|\cdot\sin\alpha$ där α är vinkeln mellan vektorerna. Vi inser att arean ges av $B\cdot h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cdot\sin\alpha = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$

E Volym

4. Volymen ges av $B\cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren ser vi att $B = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ och $h = ||\mathbf{a}|\cos\alpha|$ där α är vinkeln mellan $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ och $\mathbf{a}$. Vi finner att volymen ges av $B\cdot h = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}||\mathbf{a}||\cos\alpha| = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$.

G Plan

3. Om punkterna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ligger i ett plan som har normalvektor $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ så måste ju vektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ vara en vektor i planet, d v s den måste vara ortogonal mot normalen. Detta betyder att

$$0 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) + n_z(z-z_0).$$

Flyttar vi om lite får vi $n_x x + n_y y + n_z z - n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0 = 0$ som då är skrivet på den vanliga formen $Ax + By + Cz + D = 0$.