Kortfattade lösningar till vissa uppgifter i Uppgiftshäfte 2

I Avbildningar

4. Matriserna A, B och C avbildar planet på hela planet, men D, E och F avbildar planet på linje. De kan t ex karakteriseras av att en rad är en multipel av en annan (linjärt beroende), eller av att $ad - bc = 0$ (determinant lika med noll).

J Linearitet

3. Varje linje i planet som passerar genom origo och genom punkter $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kan skrivas

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 t \\ r_2 t \end{pmatrix}.$$

Punkterna på denna linje avbildas nu av $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ till punkterna

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 t \\ r_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ar_1 + br_2)t \\ (cr_1 + dr_2)t \end{pmatrix}$$

som är en linje m genom origo (t=0). Om $\begin{pmatrix} (ar_1 + br_2) \\ (cr_1 + dr_2) \end{pmatrix}$ skulle råka vara $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avbildas linjen ℓ inte på alla punkter på en ny linje utan bara på origo.

8. En godtycklig linje kan skrivar $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}, t \in \mathbb{R}$, där vi kan säga att $\mathbf{p}$ anger en startpunkt (t=0) och $\mathbf{r}$ anger riktningsvektor. Lineariteten ger då att $A(\mathbf{r}t + \mathbf{p}) = (A\mathbf{r})t + A\mathbf{p}$ som är en ny linje med startpunkt $A\mathbf{p}$ och riktningsvektor $A\mathbf{r}$. Observera att det kan vara så att den nya linjen går igenom origo trots att $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}$ inte gjorde det.

K Invers

9. Vill hitta $B' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ så att $B'B = I$, d v s så att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = B'B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yy & 2x + 5y \\ z + w & 2z + 5w \end{pmatrix}.$$

Får fyra ekvationer ur vilka jag kan bestämma de fyra obekanta. Finner att $(x, y, z, w) = (\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, dvs att $B' = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Om vi nu skall lösa $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan vi multiplicera bägge led från vänster med B'. Vå får då $B'B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Då $B'B = I$ och finner vi att $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Klyftigt va?

M Determinant

5. Om determinanten är noll är en rad en multipel av en annan. Låt anta att det är andra raden som är en multipel av den första. Då har matrisen formen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$. Nu vet vi att origo alltid går på origo, men vi ser dessutom att alla punkter på linjen $ax + by = 0$ också går på origo.