Kortfattade lösningar till vissa uppgifter i Uppgiftshäfte 4

R Lösningsmängder

1. Se föreläsningsanteckningar. Slutsatsen är om vi måste ha $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$ för att det skall finnas lösning. Om det finns lösningar kan de bestå av: en punkt, en hel linje, ett helt plan o s v. Vilket det blir beror på r och m, d v s på rangen och antalet obekanta. Dimensionen på lösningsmängden är $m - r$.

4. Om man går igenom de elementära radoperationerna och ser vad de gör med determinant finnar man att de högst kan ändra determinanten med en faktor skiljd ifrån noll.

T Egenvektorer och egenvärden

2. För den första matrisen i uppgiften: $\lambda_1 = 7$ och t ex $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ samt $\lambda_2 = -5$ och t ex $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

För den andra matrisen:$\lambda_1 = 7$ och t ex $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ samt $\lambda_2 = -5$ och t ex $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och slutligen $\lambda_3 = -5$ och t ex $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Antag att A är en 2×2-matris och att $A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ och $A\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2$. Vi finner att

$$A\,(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2) = (\lambda\mathbf{v}_1\,\lambda\mathbf{v}_2) = \lambda\,(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$$

där $\mathbf{v}_i$ är kolonner i matrisen $(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$. Eftersom dessa kolonner nu är linjärt oberoende har $(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$ invers. Vi finner att

$$A = \lambda\,(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)\,(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)^{-1} = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

8. Induktion. Basfallet $n = 1$ klart. Antag nu att $A^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda^{n-1}\mathbf{x}$. Skall visa att $A^n(\mathbf{x}) = \lambda^n\mathbf{x}$. Ser att

$$\text{VL} = A^n\mathbf{x} = A^{n-1}(A\mathbf{x}) = A^{n-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda\lambda^{n-1}\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x} = \text{HL}.$$

9. I planet kan varje vektor $\mathbf{v}$ fås som linjärkombination av de två linjärt oberoende vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, d v s $\mathbf{v}$ kan skrivas $\mathbf{v} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

Detta ger att

$$A\mathbf{v} = A(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = sA\mathbf{x} + tA\mathbf{y} = s\lambda_1\mathbf{x} + t\lambda_2\mathbf{y}.$$

D v s vi vet verkan av A på $\mathbf{v}$ om vi känner A's egenvektorer och egenvärden.