Inlämningsuppgift 2

Ni skall lösa inlämningsuppgiften i er grupp. Redovisningen har två delar

- Till er övningsledare lämnar ni er lösning, innehållande era Matlab-kommandon samt ev bilder. Skriv under med gruppnummer samt namn och personnummer på de personer som deltagit i lösningen av uppgiften.
- Ni redovisar muntligt halva gruppen åt gången. Var och en i gruppen måste kunna redogöra för labben. Detta sker på undervisningen den 7/12 kl. 13-15. Den som inte deltar vid denna redovisning får själv söka upp handledare för att få redovisa i efterhand.

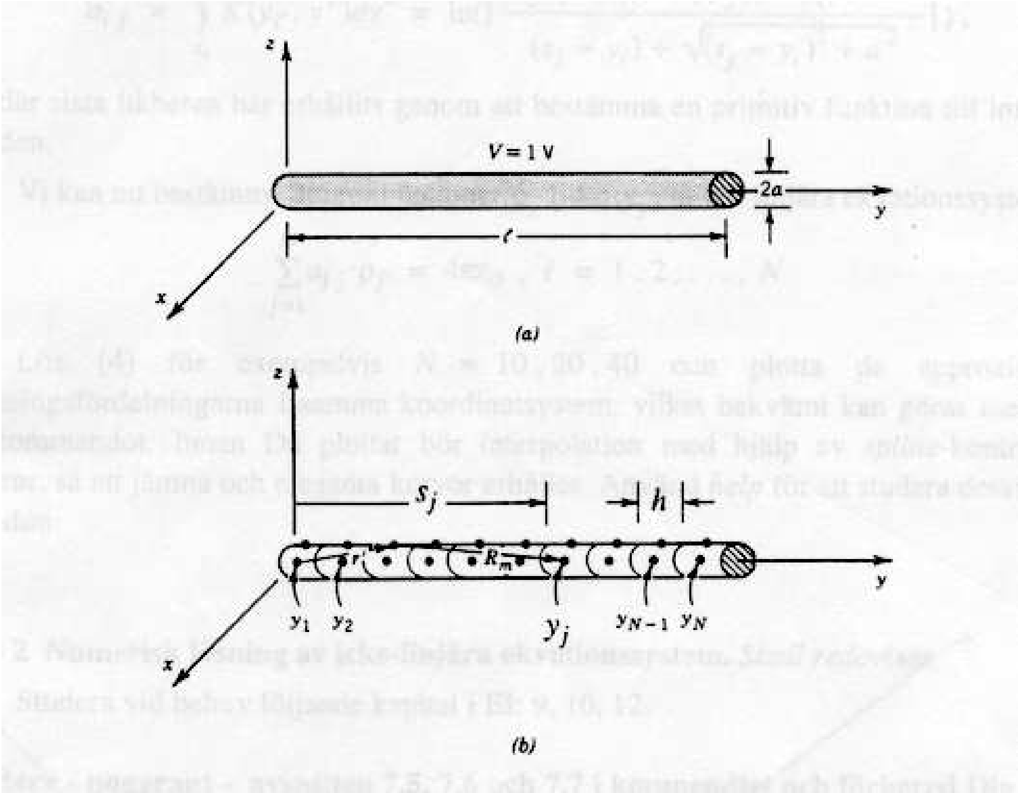
Denna inlämningsuppgift kan ge 4 bonuspoäng.

A Bestämning av en laddningsfördelning.

Det elektrostatiska problemet att bestämma potentialen till en laddningsfördelning behandlas ofta i litteraturen inom området. I praktiken är det emellertid sällan möjligt att specificera en laddningsfördelning. Däremot kan man genom att förbinda en spänningskälla med en väl ledande kropp specificera potentialen i kroppen. Observera att potentialen blir densamma i hela kroppen, vilket är detsamma som att det elektriska fältet är noll i kroppen. Tänk på Faraday's bur! Vidare ligger laddningen helt i ytskicktet. Laddningsfördelningen på kroppen kan nu beräknas genom att lösa en s k integralekvation, vilket vi skall göra för en speciell situation nedan.
Låt q vara en punktladdning placerad i punkten $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Som bekant blir det elektriska fältet och motsvarande potential i punkten $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \text{ respektive } V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

där |vektor| står för den vanliga euklidiska längden av en vektor. Dielektricitetskonstanten i vakuum $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm. Har vi flera laddningar eller en laddningsfördelning skall vi summera eller integrera fält respektive potentialer eftersom superpositionsprincipen gäller.
Antag nu att vi har en 1-m lång koppartråd med radien $a = 0.001$m, och med potentialen 1 V. Tråden tänkes vara så långt ifrån andra kroppar att dessas inverkan kan försummas.
Vidare tänkes potentialen vara noll i oändligheten.



Låt $\rho(y')$ vara den linjära laddningsfördelningen, C/m, på randen av tråden vid läget y'. Vi vet att potentialen är 1 V på randen av tråden och konstant i hela tråden. Genom att utnyttja att potentialen är 1 V på trådens axel fås tämligen lätt följande integralekvation för bestämning av laddningsfördelningen

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^1 \frac{\rho(y')}{\sqrt{(y-y')^2+a^2}}dy' = 1,\, 0 < y < 1. \tag{1}$$

För att få lite enklare beteckningar skriver vi istället integralekvationen som

$$\int_0^1 K(y,y')\rho(y')dy' = 4\pi\epsilon_0, K(y,y') = 1/\sqrt{(y-y')^2+a^2}. \tag{2}$$

Enligt figur (b) har vi

$$y_i = -1/2h + i\cdot h,\ i = 1,2,\ldots,N, \quad \text{där } h = 1/N.$$

Stoppas dessa värden in i (2) istället för y fås N likheter. Vänsterledet i (2) approximeras nu på följande sätt. Inför delningspunkterna

$$s_j = (j-1)\cdot h,\ j = 1,2,\ldots,N+1 \text{ och betrakta}$$

$$\int_0^1 K(y_i,y')\rho(y')dy' = \sum_{j=1}^{N}\int_{s_j}^{s_{j+1}} K(y_i,y')\rho(y')dy' \approx \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\cdot\rho(y_j).$$

Ovan har vi

$$a_{ij} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} K(y_i,y')dy' = \ln\Bigg(\Bigg|\frac{(s_{j+1}-y_i)+\sqrt{(s_{j+1}-y_i)^2+a^2}}{(s_j-y_i)+\sqrt{(s_j-y_i)^2+a^2}}\Bigg|\Bigg), \tag{3}$$

där sista likheten har erhållits genom att bestämma en primitiv funktion till integranden.
Vi kan nu bestämma approximationer ρ_j till $\rho(y_j)$ ur det linjära ekvationssystemet

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot \rho_j = 4\pi\epsilon_0,\ i = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

Lös (4) för exempelvis $N = 10, 20, 40$ och plotta de approximativa laddningsfördelningarna i samma koordinatsystem, vilket bekvämt kan göras med *hold on*-kommandot. Innan Du plottar bör interpolation med hjälp av *spline*-kommandot utföras, så att jämna och eleganta kurvor erhålles. Använd *help* för att studera dessa kommandon.
Observera gärna att i denna modell förefaller $\rho(0; h)$ och $\rho(1; h)$ gå mot oändligheten, då h går mot 0. **Ni kommer att återvända till denna inlämningsuppgift om laddningsfördelning** i nästa matematikkurs, då i form av en något bättre modell. Spara alltså era Matlabfiler och även denna tes till dess.

B Markov kedjor och populationsmodeller

Antag att en zoolog modellerar den skånska populationen av rävar och kaniner. Låt R_n och K_n vara antalet rävar respektive hundratals kaniner år n och antag att de beror på varandra enligt följande samband

$$R_{n+1} = 0.6R_n + 0.4K_n, K_{n+1} = -0.125R_n + 1.2K_n$$

1. Förklara hur zoologen kan ha resonerat när han satte upp dessa samband.
2. Plotta ut antalet rävar och antalet hundratals kaniner de närmaste 20 åren i ett koordinatsystem som har antalet rävar på x-axeln och antalet hundratals kaniner på y-axeln. Antag att du år noll har 50 rävar och 1500 kaniner (15 hundra kaniner). Vad ser ut att hända?
3. Uttryck de två linjära sambanden ovan som ett matrissamband och låt koefficientmatsisen betecknas med A Använd kommandot *eig* för att beräkna egenvärden och egenvektorer till A. Beräkna sedan i Matlab egenvektorer och egenvärden till A^k för värdena $k = 2, 3, 4, 100$.
4. Rita in egenrummen, d v s i detta fall de linjer som spänns upp av egenvektorerna, i bilden du plottat. Genom att uttrycka en godtycklig punkt i planet som en linjärkombination av egenvektorerna till A kan man förklara det ni ser? Gör det!
5. Vad händer om zoologen byter ut koefficient a_{22} från 1.2 mot 1.05 i koefficientmatrisen. Vad händer då? Rita motsvarande plot, inklusive egenrum, och förklara vad som orsakar skillnaden mot förra modellen.
6. Förändra nu koefficinten a_{22} så att antalet rävar går mot ett positivt och ändligt värde när tiden går? Vad händer med kaninerna då? Skapa motsvarande plot.

7. Förändra nu koefficienten a_{11} från 0.6 till 0.9 och låt återigen a_{22} vara 1.05. Gör motsvaranda plot. I denna modell får man tänka sig att Skåne inte är isolerat utan att det kan vandra in djur från Halland. Vad kommer att hända med djuren på lång sikt? Beräkna koefficientmatrisen egenvärden och egenvektorer. Kan du använda dem för att argumentera för er observation?

8. Slutligen skapar vi en kanske något mera verklighetstrogen modell genom att lägga till ett slumpmässigt bidrag av lämplig storlek.

$$R_{n+1} = 0.6R_n + 0.4K_n + ar_1, K_{n+1} = -0.125R_n + 1.05K_n + ar_2$$

   där r_i är slumptal, säg mellan 0 och 1, och a är en konstant. Vad händer nu med djurenbeståndet? Gör en plot.

9. Vad händer nu med djurenbeståndet på lång sikt? Har ni någon hypotes? Kan följande fråga hjälpa er bekräfta den:
   Vad skall $\mathbf{e}$ vara för att $\mathbf{e} = A * \mathbf{e} + a(0.5\ 0.5)^t$?