Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 001214

1. (a) Ser att

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt är $C \cdot A = I$ och därmed är $A^{-1} = C$.

(b) $AX + B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - B) = C(C - B)$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Vi gausseliminerar totalmatrisen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Bakåtsubstitution ger linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ja, ty dessa vektorer återfinns som rader i ekvationssystemets koefficientmatris. Då Gausseliminеringen gav en nollrad ser vi att raderna är linjärt beroende.

3. (a) Sätter in linjens parametrisering i planets ekvation och får $x + 2y + 3z - 1 = 3t + 2(-3t - 1) + 3(t + 1) - 1 = 0$. Vi ser att varje punkt på linjen också uppfyller planets ekvation, d v s linjen ligger i planet.

(b) Normalvektorn för den nya linjen skall vara vinkel rät mot både L_1 riktningsvektor $\mathbf{r}_1$ och planets normal $\mathbf{n}$. Tar fram sådan vektor m h a vektorprodukt.

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Tar godtycklig punkt i planet som startpunkt. Vi väljer linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

4. (a) Om parallellogrammen spänns upp av vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ och vinkel mellan dem betecknas med α kan vi betrakta $\mathbf{b}$ som en bassträcka av längd $|\mathbf{b}|$ och höjden blir då $|\mathbf{a}| \sin \alpha$. Arean blir alltså $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$ som ju är $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

(b) Antag att parallellogrammen spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Bädda in vektorerna i $\mathbb{R}^3$ som $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$. Arean ges nu av

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(ad - bc)^2} = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|.$$

(c) Paralellogrammet kan skivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} s, 0 \leq s, t \leq 1.$$

Arean är alltså $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| = 1.$

5. (a) Koordinatsambandet ges av

$$-2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Läser ut och finner att

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

(b) Antag att $\sum a_i \mathbf{u}_i = \sum b_i \mathbf{u}_i$. Det ger att $\sum (a_i - b_i)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. Då $\mathbf{u}_i$ utgör en bas är vektorerna linjärt oberoende och då implicerar ovanstående likhet att $a_i - b_i = 0$ för att i. Detta innebär att de två beskrivningarna av vektorna på koordinatform sammanfaller.

(c) T ex $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. (a) Inser att den sökta matrisen A tar planets normal till origo medan vektorer i planet ligger stilla, d v s ser att

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta kan skrivas

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger att

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Där inversen återfinns i uppgift 1a.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är bara lösbart för $\mathbf{b} \in Im(A)$. Då $Im(A)$ är planet som marisen projicerar på finns lösning endast för $\mathbf{b}$ som ligger i detta plan. Då $Im(A)$ är av dimension 2 är kärnan av dimension 1 och därmed är lösningsmängden, för ett högerled $\mathbf{b}$ i planet, en linje.

(c) Ovan ser vi att normalen till planet är egenvektor med egenvärde 0. Vidare är alla vektorer i projektionsplanet egenvektorer med egenvärde 1, som alltså är ett dubbelt egenvärde.

(d) A^{-1} existerar ej eftersom A ej är surjektiv då $Im(M) \neq \mathbb{R}^3$. $A^2 = A$ då A är en projektion. Detta ser man t ex det faktum att de har samma egenvärden ($1^2 = 1$ och $0^2 = 0$) och samma egenvektorer.

7. Detta ger ett ekvationssystem med 8 linjära ekvationer i 9 obekanta. För att slippa hantera så stora matriser väljer vi här att visa att man på förhand kan se att om man känner de obekanta a, b och c, som nedan, så ger de de övriga talen på följande vis:

a	b	
	c	

$\Rightarrow$

a	b	-a-b
-2a-b-2c	c	2a+b+c
	-b-c	-a-c

För att det skall stämma i sista rutan måste $a+b-c = a+b+2c = a+b+2c$. Denna linjära ekvation tvingar c till att vara noll medan a och b är fria. Alltså är mängden av alla magiska kvadrater en tvåparametrig mängd på följande form

a	b	-a-b
-2a-b	0	2a+b
a+b	-b	-a

8. Beräkningar ger att matrisen har egenvärden 1 och $\frac{1}{2}$ med motsvarande egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Om vi sätter

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ och } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

så gäller att $AV = VD$. Då V är inverterbar medför detta att

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 = VD^nV^{-1}\mathbf{x}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{2^n} & -1+\frac{1}{2^n} \\ 2-2\frac{1}{2^n} & -1+2\frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\frac{1}{2^n})a + (-1+\frac{1}{2^n})b \\ (2-2\frac{1}{2^n})a + (-1+2\frac{1}{2^n})b \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b-a \\ 2b-2a \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} + \begin{pmatrix} 2a-b \\ 2a-b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vi ser att detta beskriver en linje med riktningsvektorn $\begin{pmatrix} b-a \\ 2b-2a \end{pmatrix}$ som alla $\mathbf{x}_n$ ligger på. Då n går mot oändligheten kommer parametern $\frac{1}{2^n}$ gå mot noll och $\mathbf{x}_n$ går mot $\begin{pmatrix} 2a-b \\ 2a-b \end{pmatrix}$.