Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 010829

1. (a) Kvadraten $\mathcal{R}$ spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Därför spänns parallellogrammen $AB(\mathcal{R})$ upp av

$$AB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } AB\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Då två övriga hörnen är därför $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(b) $Arean(AB(\mathcal{R})) = |Det(AB)| \cdot Arean(\mathcal{R}) = |-2| \cdot 1 = 2$. Då $Det(AB) = Det(BA)$ är även $Arean(BA(\mathcal{R})) = 2$.

2. (a) Utför matrismultiplikationen BE och se att det bli I.

(b) $AXB = C + DXB \Leftrightarrow (A-D)XB = C \Leftrightarrow X = (A-D)^{-1}CB^{-1} = (A-D)^{-1}CE$ om $(A-D)^{-1}$ existerar. Ser nu att $A - D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ som har invers $(A-D)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Finner alltså att

$$X = (A-D)^{-1}CE = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$.

(b) För att ge planets ekvation tar vi fram dess normal som

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Planets ekvation ges då av

$$0 = \mathbf{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + y + z.$$

(c) Inser att vid projektion ligger de vektorerna i planet stilla och därför är $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egenvektorer med egenvärden 1. Vidare projeceras normalen $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på origo och är därför en egenvektor med egenvärde 0.

(d) Determinanten är noll eftersom ett av egenvärdena är noll.

4.

$$\begin{vmatrix} k^2 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 6k+3 & 2k+1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-k \\ k & 1 & 1 \\ 6k+3 & 2k+1 & 5 \end{vmatrix} = (1-k)\begin{vmatrix} k & 1 \\ 6k+3 & 2k+1 \end{vmatrix} =$$
$$=(1-k)(2k^2-5k-3) = (1-k)(k-3)(2k+1)$$

Detta betyder att systemet har entydig lösning om $k \notin \{1, 3, -\frac{1}{2}\}$. Kollar dessa tre fall:

$$k=1:\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -6y-4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-t \\ y=-2t \\ z=3t \end{array}\right.$$

$$k=3:\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 21 & 7 & 5 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y+z=3 \\ -2z=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=3t \\ z=3 \end{array}\right.$$

$$k=-\frac{1}{2}:\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{2}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{2}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3z=-\frac{3}{2} \\ 5z=\frac{9}{2} \end{array}\right. \quad \text{dvs lösning saknas.}$$

5. Ser att om $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektor måste det finnas λ så att $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den övre ekvationen ger $\lambda=2$ och då ger den undre ekvationen att $a=2$. Alltså är 2 ett egenvärde och motsvarande egenvektorer är $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Då en triangulär matris har sina egenvärden i diagonalen är det andra egenvärdet 1. Motsvarande egenvektor är $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. **För er som läste kursen ht2000**

   (a) $ax^2+bx+c=s\mathbf{p}_1+t\mathbf{p}_2+u\mathbf{p}_3=s+tx+u(3x^2-1)=3ux^2+tx+s-u$. Detta ger att koefficienterna blir $(s,t,u)=(c+\frac{1}{3}a,b,\frac{1}{3}a)$

   (b) Svaret i (a) visar att varje element i P kan uttryckas på precis ett sätt som en linjär kombination i $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ och är dessa tre element linjärt oberoende och spänner upp hela P.

   För er som läste kursen ht1999 eller tidigare Låt $g(x)=\frac{(ln\,x)^2}{2}+1, h(x)=e^{x-2}$ och $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Då är $g'(x)=\frac{ln\,x}{x}, h'(x)=e^{x-2}$ och $P'(x)=3ax^2+2bx+c$. För kontinuitet måste $g(1)=P(1)$ och $h(2)=P(2)$, och sedan för att deriverbarhet skall gälla måste $g'(1)=P'(1)$ och $h'(2)=P'(2)$, d v s vi får ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=\frac{(ln\,1)^2}{2}+1=1 \\ 8a+4b+2c+d=e^{2-2}=1 \\ 3a+2b+c=\frac{ln\,1}{1}=0 \\ 12a+4b+c=e^{2-2}=1 \end{array}\right.$$

   Lösningen till detta linjära ekvationssystem ger polynomet $P(x)=x^3-4x^2+5x-1$.

7. (a) Ser att $\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ alltså är

$$A\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}=A\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+7A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=$$
$$=2\cdot 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+7\cdot 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ 29 \\ 19 \end{pmatrix}$$

   (b) Varje vektor som kan skrivas som en linjärkombination av de två egenvektorerna kan man räkna ut A's verkan på, d v s vektorer i planet som spänns upp av de två egenvektorerna är den mängd av de vektorer som informationen i (a) ger hur A verkar på dem.

8. $A^3 = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^2$. Vidare ser vi att $AB = B^3A \Leftrightarrow ABA^{-1} = B^3$. Vi använder nu att man dessutom alltid har följande identitet $(ABA^{-1})^n = AB^nA^{-1}$.

   Ser nu att
$$A^2BA^{-2} = A(ABA^{-1})A^{-1} = AB^3A^{-1} = (ABA^{-1})^3 = B^{3^3} = B^9.$$

   På samma sätt ser vi sedan att då $A^3 = I$ är
$$B = A^3BA^{-3} = AB^9A^{-1} = (ABA^{-1})^9 = B^{3^9} = B^{27}.$$