Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 011219

1. (a) Riktningsvektor $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Startpunkt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Linjen ges på parameterform av uttrycket $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}, t \in \mathbb{R}$ d v s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(b) Normalen ges av linjens riktningsvektor d v s $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Planet innehåller punkten $\mathbf{p}$ om $0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ dvs då

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = x + 2y + 3z - 5$$

2. (a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -t \\ z = -4t \\ w = t \end{cases}$$

(b) Eftersom vi ej har unik lösning är, enligt sats, $Det(K) = 0$ för koefficientmatrisen K.

(c) Ser att $K(4, -1, -4, 1)^t = 0(4, -1, -4, 1)^t$ alltså är $(4, -1, -4, 1)^t$ en egenvektor med egenvärde 0.

(d) $Ker(A)$ är lösningarna till det homogena ekvationssystemet $K\mathbf{x} = 0$ d v s $Ker(A)$ är lösningsmängden given i (a) ovan.

(e) Eftersom vektorerna i fråga är kolonnerna i K ger varje nollskild punkt på lösningsmängden en uppsättning keofficienter som uppfyller villkoren.

3. (a)

$$A^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Då $A^t B = I$ finner vi att $I = I^t = (A^t B)^t = B^t A$ d v s $B^t = A^{-1}$.

(c) $det(AB) = det(A)det(B) = det(A^t)det(B) = det(A^t B) = det(I) = 1$.

4. (a) Ser att

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Om $\mathbf{b} \notin Im(A)$ d v s om $\mathbf{b} \neq a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ saknas lösning. Vektor ortogonal mot både vektorerna ligger naturligtvis inte i planet de spänner upp. Väljer därför

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(c) Nej, ty $Im(A)$ är bara ett plan och spänner inte upp hela $\mathbb{R}^3$.

5. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Då finner vi att $\overrightarrow{Aa} = \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $\overrightarrow{Aa} = \frac{1}{2}\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och $\overrightarrow{Aa} = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \mathbf{u}$. Summerar vi dessa ser vi att vi får nollvektorn.

6. (a) Söker A så att

$$A\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ och } A\begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 10 \end{pmatrix}$$

d v s vi finner att

$$A = \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -28 \\ -16 & 32 \end{pmatrix}\frac{1}{-64} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(b) Ser att vi har $x_{n+1} = \frac{5}{4}x_n - \frac{3}{4}y_n$ och $y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n$. Detta betyder att djurart x påverkas negativt av djurart y medan djurart y påverkas positivt av djurart x. Alltså måste enligt denna modell y motsvara rovdjuren, d v s lejonen.

(c) Vi beräknar egenvärden och egenvektorer och finner

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1 \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

Ser sedan att $\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = 8\mathbf{v}_1 + 8\mathbf{v}_2$ vilket medför att

$$A^k\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = A^k(8\mathbf{v}_1 + 8\mathbf{v}_2) = 8A^k\mathbf{v}_1 + 8A^k\mathbf{v}_2 = 8(1)^k\mathbf{v}_1 + 8(\frac{1}{2})^k\mathbf{v}_2)$$

Detta kommer för alla naturliga tal k att ge ett positivt värde och konvergerar mot vektorn $8\mathbf{v}_1 = 8\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$

7. Ser att $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 = 1 \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ d v s att $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ är en egenvektor med egenvärde 1. På samma sätt ser vi att $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = -1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ d v s att $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ är en egenvektor med egenvärde -1. Alltså är A en spegling i linjen med riktningsvektor $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ i riktningen given av $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Speglingen är ortogonal omm skalärprodukten är noll d v s om

$$0 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_1|^2 - |\mathbf{x}_2|^2.$$

Då längder är positiva tal ser vi att detta gäller precis då $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$.