Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 020404

1. (a) Vektorerna $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spänner upp ett planet som dessutom skall innehålla punkten$(1,0,0)$. Planet ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}$$

(b) Då Π_2 är parallellt med Π_1 ges dess norman av $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Då Π_1 har ekvationen $-3x + y - 5z = 3$ skär t ex inte planet givet av $-3x + y - 5z = 0$ planet Π_1.

2. (a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & k-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & k-4 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+3 \end{array}\right)$$

Lösbar omm k=3 och då är lösningen $x = \frac{1}{4} + t, y = \frac{1}{2} - t, z = \frac{1}{4} - t, w = t, t \in \mathbb{R}$.

(b) Dimensionen på lösningsmängden är lika med antalet fria parametrar vilket är 1.

(c) Eftersom Gausselimineringen gav en nollrad i koefficientmatrisen är dess determinant lika med noll.

3. (a) Multiplikation av matriserna ger $AB = I$

(b) Planet har normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och innehåller vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alltså skall projektionsmatrisen P uppfylla

$$P\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d v s

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Ett möjligt alternativ är sexhörningen med hörnen $(0,0), (1,0), (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (1, \sqrt{3})(0, \sqrt{3})(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Två möjliga diagonaler ges då av $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. För vinkeln α mellan dessa diagonaler gäller då att

$$\alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{|d_1| \cdot |d_2|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Detta medför att vinkeln mellan vektorerna är $\frac{\pi}{3}$, vilket är det förväntade, en 6-del av ett helt varv.

5. (a) Inser att $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Detta medför att

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 8^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -62 & 63 \\ -126 & 127 \end{pmatrix}$$

(b) M och $A = M^3$ har samma egenvektorer, men Ms egenvärden uppfyller $\mu^3 = 1$ och $\mu_2^3 = 8$. Det betyder att $\mu_1 = 1$ och $\mu_2 = 2$ är den enda reella möjligheten. Finner att

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(a)

$$\begin{pmatrix} x_{1990} \\ y_{1990} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_{1991} \\ y_{1991} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt inser är

$$\begin{pmatrix} x_{1989} \\ y_{1989} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

(b) Nej, A^{-1} har egenvärden 1 och 2. Alltså växer djurbeståndet obegränsat när man går bakåt i tiden.

(c) För att modellen $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ skall närma sig jämvikt för ökande n måste A s egenvärden uppfylla $|\lambda_i| \leq 1$. Å andra sidan har A^{-1} egenvärden $\frac{1}{\lambda_i}$ vilka då uppfyller $|\frac{1}{\lambda_i}| \geq 1$. För att modellen skall gå mot jämvikts läge både framåt och bakåt i tiden måsta alltså $|\lambda_i| = 1$. Om något $\lambda_i = -1$ får vi cykel av ordning 2 men om $\lambda_1 = 1$ för alla i är modellen konstant.

7. Antag att $Ker(A) = Im(A)$. Då $dim(Ker(A)) + dim(Im(A)) = 2$ får vi att båda har dimension 1. Alltså är $A \neq \mathbf{0}$ och $Det(A) = 0$. Detta innebär att raderna linjärtberoende och att minst en av raderna är skild från noll. Låt oss anta att övre raden. Då kan A skivas på formen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$. Finner då att $Ker(A) = \{ax + by = 0\}$ medan $Ker(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}t, t \in \mathbb{R}\}$. Får att $Ker(A) = Im(A)$ omm $0 = at + bkt = (a + bk)t, t \in \mathbb{R}$, d v s omm $0 = a + bk = Tr(A)$.

Omvänt om $A \neq \mathbf{0}$ och $Det(A) = Tr(A) = 0$ så har A karakteristisk ekvation $\lambda^2 = 0$. Då uppfyller A sambandet $A^2 = \mathbf{0}$. Alltså gäller $Ker(A) \supseteq Im(A)$. Men då $A \neq \mathbf{0}$ är $dim(Im(A)) \geq 1$ alltså gäller likhet, d v s $Ker(A) = Im(A)$.