Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 991215

1. (a)

$$\frac{2x^2+x}{x^2+x} = \frac{x}{x}\cdot\frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1 \text{ då } x \longrightarrow 0.$$

(b)

$$\frac{2x^2+x}{x^2+x} = \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{2+1/x^2}{x^2+1/x} = \frac{2+1/x^2}{1+1/x} \longrightarrow \frac{2}{1} = 2 \text{ då } x \longrightarrow \infty.$$

(c)

$$f'(x) = \frac{(4x+1)(x^2+x)-(2x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{x^2}{(x^2+x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Denna ekvation saknar lösning. Visserligen går $f'(x)$ mot noll då x går mot ∞ eller $-\infty$ men det saknas x för vilket $f'(x)$ blir 0.

2. (a) Vi ser att arean av området M är $4\cdot 4 = 16$ medans området N har area $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. Alltså måste determinanten av A vara $\pm 2/16 = \pm 1/8$.

(b) Det finns många olika matriser som avbilda M på N. Vi får ett exempel genom att låta $A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Detta ger att

$$A\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d v s } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{8}.$$

(c) Man kan skriva $A = \frac{1}{\sqrt{8}}R_{\pi/4}$, där $R_{\pi/4}$ är matrisen som roterar planer $\pi/4$ radianer moturs. Detta betyder att det inte finns någon linje som avbildas på sig själv, vilket motsäger att det finns reellt egenvärde. Räknar man finner man att egenvärdena är nollställena till polynomet $\lambda^2 - 2\lambda + 2$, och detta polynom saknar reella lösningar.

3. (a) Vi skall hitta $\mathbf{x}$ så att $(\mathbf{u}|\mathbf{x}) = 0$ och $(\mathbf{v}|\mathbf{x}) = 0$. Detta betyder att vi skall hitta de $\mathbf{x}$ som är vinkelräta mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vektorprodukten

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ger en sådan vektor. Alla andra vektorer som är vinkelräta mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är en multipel av $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Lösningen blir alltså $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} t$, en linje genom origo.

(b) om vi sätter $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1x+2y+0z&=1 \\ 1x+0y+1z&=1 \end{aligned}$$

Här kan vi direkt avläsa att om vi sätter $x = t$ blir $y = \frac{1}{2}(1-t)$ och $z = 1-t$, d v s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

som är en linje med samma riktning som i uppgift (a) fast genom punkten $(0, \frac{1}{2}, 1)$ istället.

4. (a) Egenvärden:

$$0 = Det(A - \lambda E) Det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -5-\lambda & 1 \\ 5 & 12 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+7).$$

$\lambda_1 = 0$: Söker homogena lösning till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 5 & 12 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ser att t ex $\mathbf{v}_1 = (-7, 3, 1)^t$ är en lösningen och därmed en egenvektor. Finner sedan

$$\mathbf{v}_2 = (9, -1, 11)^t \text{ för } \lambda_2 = 2, \text{ och}$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, -2)^t \text{ för } \lambda_3 = -7.$$

(b) Handlar om att lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = 0$, men det har vi redan gjort ovan. $Ker(A)$ blir helt enkelt den linje som spänns upp av egenvektorn motsvarande egenvärdet noll, d v s $Ker(A) = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^t = t(-7, 3, 1)^t\}$

(c) Vi har redan tagit fram trappmatrisen motsvarande A i uppgift (a) ovan. Där ser vi att rangen är 2.

(d) Man kan naturligtvis räkna ut determinanten med t ex Sarrus regel, men eftersom rangen inte är det maximala, d v s inte är 3, måste determinanten vara 0.

5. (a) Eftersom planet går igenom origo räcker det att hitta tre punkter i planet. Deras ortsvektorer ligger då i planet. Ser att $(0, -3, 2)^t, (-3, 0, 1)^t$ och $(-2, 1, 0)^t$ är tre vektorer i planet där ingen är en multipel av en annan.

(b) Nej, dessa vektorer är linjärt beroende eftersom de ligger i ett plan. Den som vill kan se det genom att beräkna determinanten av den matris som har ovanstående vektorer som kolonner (eller deras transponat som rader).

(c) När vi väl har två vektorer t ex $(-3, 0, 1)^t$ och $(-2, 1, 0)^t$ i planet samt en punkt t ex $(0, -3, 2)^t$ i planet är får vi en parametrisering av planet på följande vis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

6. (a) Nej, det är inte en linjär funktion eftersom det inte gäller i allmänhet att $Det(aA + bB) = aDet(A) + bDet(b)$. Som motexempel tar vi

$$\text{VL} = Det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = Det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) = 5$$
$$\text{HL} = Det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) + Det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1 + 1 = 2$$

(b) Ser att $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{0})$. Detta innebär att $F(\mathbf{0})$ måste vara $\mathbf{0}$.

(c) Nej, funktionen Det i uppgift (a) är ett motexempel.

7. Sätter $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2/2}}$. Deriverar denna kvot och får

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{x^2/2} - f(x)e^{x^2/2}x}{(e^{x^2/2})^2} = \frac{(f'(x) - f(x)x)e^{x^2/2}}{(e^{x^2/2})^2} = \frac{0 \cdot e^{x^2/2}}{(e^{x^2/2})^2} = 0,$$

eftersom $f'(x) - f(x)x = 0$. Detta betyder att $g(x) = K$, d v s är en konstant. Detta ger att $g(x) = g(2) = \frac{f(2)}{e^{2^2}/2} = \frac{3}{e^2}$. Ur detta kan vi nu se att $f(x) = g(x)e^{x^2/2} = \frac{3}{e^2}e^{x^2/2}$.

8. Eftersom avstånd ges av ett positivt tal räcker det att se att avståndet i kvadrerat bevaras under A.

Avståndet mellan $A\mathbf{x}$ och $A\mathbf{y}$ i kvadrat $= |A\mathbf{x} - A\mathbf{y}|^2 = (A\mathbf{x} - A\mathbf{y}|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}) = (A(\mathbf{x} - \mathbf{y})|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})) =$
$(A(\mathbf{x} - \mathbf{y}))^t A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^t A^t A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^t E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}|\mathbf{x} - \mathbf{y}) =$
$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 =$ Avståndet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i kvadrat