MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tentamen 00-12-14 kl. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Dubbelsidigt handskivet A4-blad (valfritt innehåll), *inga miniräknare*
Telefonvakt: Ola Helenius ankn.: 0740-459022

Matematik D del B — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

Tänk på att det i huvudsak är dina motiveringar och beräkningar som ger poäng, inte svaret.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Vilken av följande matriser är invers till A?

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Finn den matris X som löser matrisekvationen $AX + B = C$ (6)

2. (a) Lös ekvationssystemet

   $$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

   (b) Är följande vektorer linjärt beroende:

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

   (6)

3. Låt π vara planet givet av ekvationen $x + 2y + 3z = 1$ i $\mathbb{R}^3$.

   (a) Ligger linjen $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, i planet π.

   (b) Finn en linje L_2 som ligger i π och som är ortogonal mot L_1. (6)

4. (a) Förklara hur man kan beräkna arean av en parallellogram i $\mathbb{R}^3$ m h a vektorprodukt. Bevisa ditt påstående

   (b) För att beräkna arean av en parallellogram i $\mathbb{R}^2$ kan man använda determinant. Hur ser man det?

   (c) Beräkna arean av den paralellogram som har punkterna $(1, 1), (2, 3), (3, 6), (4, 8)$ som hörn. (6)

....vänd

5. **För er som läst kursen i år**

Låt $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Uttryck vektorn $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{u}}$ på koordinatform i basen $\mathbf{v}$.

(b) Förklara varför en vektor endast kan uttryckas på ett enda sätt på koordinatform i en given bas.

(c) Ge exempel på en annan ON-bas än standardbasen i $\mathbb{R}^2$. (6)

För er för vilka detta är en omtenta

(a) Antag att funktionen $f(x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ har invers f^{-1}. Finns det något samband mellan deras derivator.

(b) Förklara hur man kan se att detta samband gäller.

(c) Beräkna derivatan av $\arcsin x$, då du vet att derivatan av $\sin x$ är $\cos x$. (6)

6. (a) Finn en matris A som projicerar punkter i $\mathbb{R}^3$ ortogonalt på planet $x + y + z = 0$. Du kan eventuellt ha nytta av resultat från uppgift 1.

(b) För vilka högerled $\mathbf{b}$ är ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart, och vad är lösningsmängden för typ av geometriskt objekt?

(c) Ange alla egenvärden samt motsvarande egenvektorer till A.

(d) Ange, om möjligt, A^{-1} och A^2. (6)

7. Hitta alla magiska kvadrater med delsumma = 0 och där antalet rader = antalet kolumner = 3. En delsumma är den summa du får om du summerar en rad, en kolumn eller en diagonal. I en 3x3 matris finns det alltså 8 delsummor totalt som alla skall vara lika med 0. Använd reella tal. (6)

8. Låt $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Låt nu A upprepat verka på $\mathbf{x}_0$ genom $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$.

(a) Vad blir $\mathbf{x}_n$ när n går mot oändligheten, d v s vad är $\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{x}_n$.

(b) Kan du visa att, givet $\mathbf{x}_0$, så kommer alla punkter $\mathbf{x}_n$ ligga på en linje. (6)

God Jul! — Samuel