Matematik
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen 01-08-29 kl. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Dubbelsidigt handskivet A4-blad (valfritt innehåll), *inga miniräknare*
Telefonvakt: Richards Grzibovski ankn.: 0740-459022

Matematik D del B — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Bestäm paralellogrammen $AB(\mathcal{R})$ där $\mathcal{R}$ är parallellogrammen med hörn i punkterna $(0,0), (1,0), (0,1)$ och $(1,1)$.

   (b) Bestäm arean av de respektive parallellogrammen $AB(\mathcal{R})$ och $BA(\mathcal{R})$. (6)

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Är B och E varandras inverser?

   (b) Lös matrisekvationen $AXB = C + DXB$. (6)

3. Låt Π vara planet genom origo som spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Beskriv planet på parameterform.

   (b) Ange planets ekvation.

   (c) Låt P vara en matris som projicerar rummet ortogonalt på Π. Finn tre linjärt oberoende egenvektorer till P och ange även motsvarande egenvärden.

   (d) Ange $Det(P)$. (8)

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} k^2x + ky + z = k \\ kx + y + z = k \\ (6k+3)x + (2k+1)y + 5z = 3k+6 \end{cases}$$

   för de värden på k då systemet har oändligt många lösningar. (6)

5. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ har egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisens samtliga egenvektorer och egenvärden. (6)

....vänd

6. **För er som läste kursen ht2000**

Låt $P = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$, d v s mängden av alla reella polynom av grad högst 2. Låt vidare $\mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = x, \mathbf{p}_3 = 3x^2 - 1$.

(a) Kan man uttrycka ett godtyckligt element $ax^2 + bx + c$ i P som en linjärkombination i $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ och $\mathbf{p}_3$? Ange vad koefficienterna blir.

(b) Utgör $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ en bas för P? (6)

För er som läste kursen ht1999 eller tidigare

Finn ett tredjegradspolynom $P(x)$ så att följande funktion blir deriverbar.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{2} + 1, & \text{om } 0 < x < 1 \\ P(x) & \text{om } 1 \leq x \leq 2 \\ e^{x-2} & \text{om } 2 < x \end{cases}$$

7. (a) A är en 3×3-matris med egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ med egenvärde 4 och egenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenvärde 7. Beräkna $A \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(b) Ange mängden av $\mathbf{x}$ sådana att man kan beräkna $A\mathbf{x}$ med hjälp av informationen i (a). (6)

8. Låt A och B vara $n \times n$-matriser sådana att $A^3 = I, AB = B^3 A, Det(B) \neq 0$. Visa att $B^{26} = I$. (6)

Lycka till! — Samuel