Matematik
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen 99-12-15 kl. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Dubbelsidigt A4 (valfritt innehåll), *inga miniräknare*
Telefonvakt: Greger Cronquist ankn.: 0740-459022

Matematik D del B — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

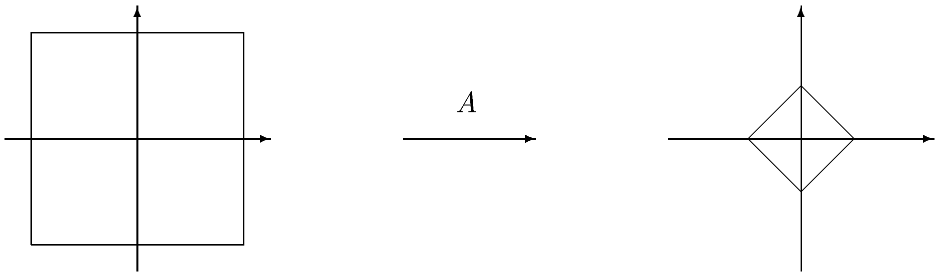
Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
På denna tenta betecknar vi skalärprodukt med $(x|y)$

1. Låt $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2+x}$.
   (a) Beräkna $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$.
   (b) Beräkna $\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)$.
   (c) Lös ekvationen $f'(x) = 0$.
   (6)

2. Låt

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2, |y| \le 2 \right\} \text{ och } N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1 \right\}$$

och låt A vara en matris som avbildar M på N, d v s



   (a) Kan du säga vad $Det(A)$ är utan att först ha tagit fram A?
   (b) Beräkna A.
   (c) Har A några reella egenvärden? Förklara detta utifrån din kunskap om hur A verkar på planet.
   (6)

3. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} (\mathbf{u}|\mathbf{x}) = a, \text{ där } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{v}|\mathbf{x}) = b, \text{ där } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

   (a) Hur kan man använda vektorprodukt för att lösa ekvationssystemet i fallet $a = b = 0$?
   (b) Lös ekvationssystemet då $a = b = 1$.
   (6)

....vänd

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 5 & 12 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Beräkna egenvärden och egenvektorer till A.

   (b) Beräkna $Ker(A)$ och ange vad för geometriskt objekt kärnan blir i detta fall.

   (c) Beräkna $Rang(A)$.

   (d) Vad har A för determinant?

(8)

5. (a) Finn tre vektorer i planet $x + 2y + 3z = 0$ som alla har olika riktning.

   (b) Är dessa vektorer linjärt oberoende?

   (c) Skriv planet på parameterform. (6)

6. (a) Är funktionen $Det : \{2 \times 2\text{-matriser}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ en linjär funktion. Motivera ditt svar.

   (b) Vi vet att en matris avbildar origo på origo. Visa att för en godtycklig linjär avbildning $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gäller att $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

   (c) Gäller det omvända, nämligen att om $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ så är F en linjär avbildning? Motivera ditt svar. (6)

7. Antag att vi vet att $f'(x) = xf(x)$, och att $f(2) = 3$. Beräkna vad f är för funktion genom att derivera $\frac{f(x)}{e^{x^2/2}}$. (6)

8. En matris A kallas ortogonal om dessa kolonner är inbördes parvis ortogonala och är enhetsvektorer, d v s om $A^t A = E$. Visa att en ortogonal matris bevarar avstånd, d v s att avståndet mellan två givna punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är samma som avståndet mellan $A\mathbf{x}$ och $A\mathbf{y}$. (6)

God Jul! — David, Niklas, Ola, Per och Samuel