MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660, 19/10/2009, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 30 poäng på del 1.

Del 1

1. (a) För vilka tal h är ekvationsystemmet nedan lösbart? (5p)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + hx_4 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3 \end{cases}$$

(b) Lös ekvationsystemmet ovan för $h = 2$. (3p)

2. (a) Beräkna determinant (1p)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

(b) Beräkna determinant (2p)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(c) Beräkna determinant (3p)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(d) Låt matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ vara avbildningsmatrisen för en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Om R är ett rätblock med volym 2, hur stor är volymen av $T(R)$? (2p)

3. (a) $A = (1, 1, 0), B = (3, 4, 2)$ och $C = (2, 1, 2)$ är tre punkter i $\mathbb{R}^3$. Hitta en ekvation för ett plan π som går genom punkterna A, B och C. (4p)

   (b) Hitta avståndet från origo till planet π som du har hittat i uppgift (a). (4p)

4. Polynomet $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x - 4$ har en rot $(1 - i)$. Hitta övriga rötter av polynomet. (8p)

5. (a) Din granne gör ett examensarbete om kulturarv från en försvunnen civilization på en avlägsen ö i Stilla Havet. En av deras konstruktioner var fem kolonner byggda av svarta och vita stenblock som är staplade på varann. Det sista forskningslaget som var på ön har mätt höjderna på kolonnerna och observerat att stenblock av samma färg har samma höjd. Efter det har en tsunamivåg förstört hela ön. Din granne vill veta höjden av varje typ av stenblock, men inga tal som han har provat fungerar, förmodligen för att mätningarna inte var tillräckligt noggranna. Professorn som grannen arbetar med har hört att det finns en metod, som heter minsta kvadratmetoden, som hjälper till att hitta tal som passar mätningarna bäst. Hjälp din granne hitta höjderna på stenblocken med hjälp av minsta kvadratmetoden om följande är känt: En kolonn av 3 svarta och 3 vita block har höjden 25m; en kolonn av 2 svarta och 4 vita block har höjden 23 m; en kolonn av 4 svarta och 2 vita block har höjden 23m; en kolonn av 1 svart och 5 vita block har höjden 27 m; en kolonn av 5 svarta och 1 vitt block har höjden 22 m. (6p)

   (b) Om man provar olika tal så ser man att hade talen varit rätta hade de fem mätningar fel som vi betecknar respektive $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$. I vilken mening är felen som man får med minsta kvadratmetoden minst (välj av följande fem alternativ den som är rätt, du behöver inte motivera ditt svar):

   Minsta kvadratmetoden minimerar: (2p)

   i. $\sqrt{\epsilon_1^2} + \sqrt{\epsilon_2^2} + \sqrt{\epsilon_3^2} + \sqrt{\epsilon_4^2} + \sqrt{\epsilon_5^2}$
   ii. $\sqrt{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2 \cdot \epsilon_3^2 \cdot \epsilon_4^2 \cdot \epsilon_5^2}$
   iii. $\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 + \epsilon_5^2}$
   iv. $\max(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_3^2, \epsilon_4^2, \epsilon_5^2)$
   v. $\min(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_3^2, \epsilon_4^2, \epsilon_5^2)$

Del 2

6. Formulera och bevisa satsen om standardmatrisen för en linjär avbildning (inklusive entydlighet) (10p)

7. Låt $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^5$.

   (a) Vad menas med en *linjär kombination av* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$? (2p)

   (b) Visa att om $\mathbf{n}$ är ortogonal till både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så är $\mathbf{n}$ också ortogonal till alla deras linjära kombinationer. (2p)

   (c) Visa att om $\mathbf{n}$ är ortogonal till $\mathbf{m}$ så är $\|\mathbf{n}+\mathbf{m}\| \geq \|\mathbf{n}\|$. (2p)

   (d) Härled från det som du har visat i punkt (b) och (c) att dem tal som du har hittat i uppgift 5 minimerar felet i den mening i vilket de ska minimera den. (4p)

8. Beräkna $Im(\sum_{j=0}^{2009}(\sqrt{3}-i)^j)$. Svaret får inte innehålla symbolen i eller dylikt[1]. (10p)

9. En professor har skrivit på tavlan exampel av matrismultiplication $A \cdot B = C$ (räkningen var rätt). Under rasten har en av studenterna bytt ordning av kolonnerna i matrisen C, och en annan student har suddat talen i matrisen A. Nu står det på tavlan

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 & 8 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Hitta de ursprungliga matriserna. Är lösningen entydlig? (10p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Maria

[1] så $\sum_{j=0}^{2009} Im((\sqrt{3}-i)^j)$ dugger inte