Permutationer

Definition 1. Permutation τ av storleken n är en plasering av heltal mellan 1 och n i viss ordning. Vi betecknar som $\tau(k)$ talet som står på plats k.

Exempel. $\tau = (3, 5, 2, 4, 1)$, $\tau(3) = 2$.

Definition 2. Vi säger att en permutation har plus eller minus tecken och betecknar det $\sigma(\tau) = 1$ eller $\sigma(\tau) = -1$ om τ innehåller jämn eller, motsvarande, odda antal av par av tal som står i fel ordning.

Exempel. Om $\tau = (3, 5, 2, 4, 1)$, så paren som står i fel ordning är $3-2$, $3-1$, $5-2$, $5-4$, $5-1$, $2-1$, och $4-1$, alltså $\sigma(\tau) = -1$.

Lemma 3. *Om vi byter plats på två tal i en permutation, permutationen byter tecken.*

Bevis. Betrakta $\tau = (r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_m, \ldots, r_n)$ och $\tau' = (r_1, \ldots, r_m, \ldots, r_k, \ldots, r_n)$, där r_k och r_m bytte plats, men alla andra tal står på samma positioner. Om vi betraktar ett par av tal annan än r_k och r_m, så ingenting ändras mellan τ och τ', så alla ändringar kommer från par där ingår r_k eller r_m (eller båda).

Alla tal som står till vänster om plats k i både τ och τ' har samma ordning i par med r_k eller r_m i båda fall, så det blir inte någon skillnad av dem. Samma gäller tal som står till höger från position m. Varje tal som står på position mellan plats k och m har i τ annan ordning med r_k än i τ'. Men också med r_m dem står i motsatt ordning i τ och i τ'. Så, för varje sådant tal r_s, man har eller både par $r_k - r_s$ och $r_s - r_m$ i fel ordning i τ men ingen i τ', eller en av paren i fel ordning i τ och den andra i fel ordning i τ', eller ingen av dem i fel ordning i τ och båda i τ'. Hur som helst, det påverkar inte om antal av fel-ordnade paren är jämn eller odda.

Äntligen, paret $r_k - r_m$ står i fel ordning eller i τ eller i τ', men inte i båda samtidigt. Så det ändrar paritet av antal fel-ordnade paren i τ mot det i τ'. □

Determinant

Definition 4. För en matris $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ är dess determinant

$$det(A) = \sum_{\tau} \sigma(\tau) a_{1\tau(1)} \ldots a_{n\tau(n)}$$

där τ löper över alla möjliga permutationer av n tal

Exempel. I summan för matrisen 5×5 ingår produkten $(-1) \cdot a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$ (Obs! Tecken på permutationen $(3, 5, 2, 4, 1)$ är minus, så ingår produkten $a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$ med minus.)

Det tråkiga med denna definitionen är att det är ganska opraktiskt att använda den direkt för stora matriser: Det blir $5! = 120$ permutationer för en matris 5×5.

Följesats 5. *Om en matris A har en rad där alla tal är 0, så är $det(A) = 0$.*

Bevis. Varje produkt i summan som definierar determinant har exakt ett tal från varje rad. Om i en av raderna står bara nollar, blir det en noll i varje produkt. Därmed är alla produkterna i summan är noll, så att hela summan är noll. □

Egenskaper av determinanten

Om vi gångrar en rad med ett tal. Eftersom varje produkt i summan som definierar determinanten innehåler exakt en element från raden som vi har multipliserat, så kan vi bryta talet utt ur summa och se att det multipliserar hela (ursprunglig) determinanten.

Om vi byter plats på två rad. Låt vi har bytt plats av rad k och rad m i matrisen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$. Så, är determinanten av ny matrisen

$$\sum_{\tau} \sigma(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{m\tau(k)} \dots a_{k\tau(m)} \dots a_{n\tau(n)}.$$

Det är samma som om vi summerar

$$\sum_{\tau} \sigma(\tau) a_{1\tau'(1)} \dots a_{m\tau'(m)} \dots a_{k\tau'(k)} \dots a_{n\tau'(n)},$$

där man får τ' ur τ genom att byta talen på plats k och m. Lemma om byte av tecken i en permutation säger att $\sigma(\tau) = -\sigma(\tau')$. Alltså, är determinanten av matrisen med uppbyttna raderna

$$\sum_{\tau} -\sigma(\tau') a_{1\tau'(1)} \dots a_{m\tau'(m)} \dots a_{k\tau'(k)} \dots a_{n\tau'(n)} = -det(A).$$

Notera att då τ löper genom alla möjliga permutationer löper också motsvarande τ' genom alla möjliga permutationer.

Följesats 6. *Om en matris A har två lika rader, så är $det(A) = 0$.*

Bevis. Om vi bytter plats på två raderna som är lika får vi samma matrisen. Så, vi ser att $det(A) = -det(A)$, och då måste $det(A) = 0$. □

Om vi lägger en multipel av en rad till en annan rad, så ändras inte determinanten.

Bevis. Låt matrisen är $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ och låt oss betrakta matrisen $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ där $b_{ij} = a_{ij}$ för alla $i \neq m$, och $b_{mj} = a_{mj} + \alpha a_{kj}$. När vi skriver formeln för $det(B)$ enligt definitionen, ser vi att varje produkt innehåller exakt ett element från rad m. Om vi nu öpnar paranteser i utrycket $b_{mj} = (a_{mj} + \alpha a_{kj})$ i varje produkt och samlar motsvarande termerna ihop, ser vi att $det(B) = det(A) + \alpha \cdot det(C)$ där $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$, $c_{ij} = a_{ij}$ för alla $i \neq m$, och $c_{mj} = a_{kj}$. Nu, efter Följesats 6, måste $det(C) = 0$, därmed $det(B) = det(A)$. □