MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2014-10-27 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen Telefonvakt: Johan Tykesson

Telefon: 031-772 35 14

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 24 p, 4: 36 p, 5: 48.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. (2 p)

(b) Låt $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (3,0,3,3)$, $\mathbf{v}_3 = (4,2,4,0)$, $\mathbf{v}_4 = (1,0,1,0)$ och $\mathbf{v}_5 = (0,0,1,0)$. Avgör om (6 p)

- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ spänner upp $\mathbb{R}^4$
- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende
- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ spänner upp $\mathbb{R}^4$
- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ är linjärt oberoende
- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ och $\mathbf{v}_5$ spänner upp $\mathbb{R}^4$
- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ och $\mathbf{v}_5$ är linjärt oberoende.

2. Låt T vara triangeln med hörn i punkterna $(1,1)$, $(2,2)$ och $(3,-3)$. (8 p)

(a) Beräkna arean av T.

(b) Låt $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, där $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Vad är arean av $f_A(T)$?

(c) Låt $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $t(1,1), t \in \mathbb{R}$, och låt B vara f_B's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm $|B|$. Vad är arean av $f_B(T)$?

(d) Låt $f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara medurs rotation med $\pi/4$ radianer och låt C vara f_C's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm $|C|$. Vad är arean av $f_C(T)$?

(e) Låt $f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara skalning med en faktor 3, och låt D vara f_D's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm $|D|$. Vad är arean av $f_D(T)$?

3. (a) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

(b) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

(c) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

(d) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

4. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $x + y + z = 0$. Låt A vara f's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm A's kolonnrum, nollrum, rang och nolldimension. (8 p)

5. Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto (3+i)z$ och låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $F = g^{-1} \circ f \circ g$. Bestäm avbildningsmatrisen för F. (6 p)

6. Låt $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $Q = (4, 3)$. Bestäm ekvationerna för de linjer ℓ som går genom Q och uppfyller att avståndet från ℓ till P_1 är lika med avståndet från ℓ till P_2. (8 p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

8. (a) Låt A vara en $m \times n$-matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \tag{1}$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$. (6 p)

(b) Finns det alltid en entydig lösning till (1)? Motivera ditt svar. Om svaret är nej, räcker det med motexempel. (2 p)

Lycka till!

Elizabeth