TMA 660 Linjär algebra och geometri 27/10 14 Lösningar

1a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$ eftersom rad 1 och rad 3 är lika.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(0+6+12-6-0-0) = \underline{\underline{-12}}$$

utveckla längs kolonn 4

t ex Sarrus

b) Bassatsen: • 3 vektorer kan ej spänna upp $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ spänner ej upp $\mathbb{R}^4$

• 5 vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjärt beroende

$\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_5$ ej linjärt oberoende

$|A| = 0 \Rightarrow v_1, \ldots, v_4$ ej bas för $\mathbb{R}^4$ $\Leftrightarrow$ $v_1, \ldots, v_4$ spänner ej upp $\mathbb{R}^4$ $\Leftrightarrow$ $v_1, \ldots, v_4$ ej linj. oberoende

Bassatsen

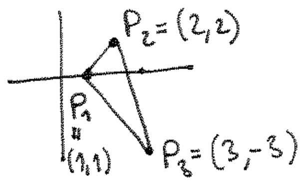
$|B| \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_5$ bas för $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ linjärt oberoende

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ spänner upp $\mathbb{R}^4$

---

2) a)



Arean av T är absolutbeloppet av

$$\frac{1}{2}\left| \overrightarrow{P_1P_2} \ \ \overrightarrow{P_1P_3} \right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-4-2) = -3$$

Slutsats: Arean av T är $\underline{\underline{3}}$.

b) Arean av $f_A(T) = |\det A| \cdot \text{arean}(T) = \left|\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right| 3 =$

$10 \cdot 3 = 30$ Slutsats: Arean av $f_A(T)$ är $\underline{\underline{30}}$

c) Spegling $\left.\begin{array}{l} - \text{bevarar area} \\ - \text{byter orientering} \end{array}\right\} \Rightarrow |B| = \underline{\underline{-1}}$

Arean av $f_B(T) = \text{arean}(T) = \underline{\underline{3}}$

d) Rotation – bevarar area och orientering $\Rightarrow |C| = \underline{\underline{1}}$

Arean av $f_C(T) = \text{arean}(T) = \underline{\underline{3}}$

e) Skalning med 3, skalar arean med $3^2 = 9$

$\Rightarrow |D| = \underline{\underline{9}}$ Arean av $f_D(T) = 9 \cdot \text{arean}(T) = \underline{\underline{27}}$

3a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ så $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}$

b) Inversen kan t ex beräknas med Gausselimination (eller möjligtvis genom att beräkna adjunkten).

Gausselim:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \boxed{1/2} \cdot -\tfrac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

<u>Slutsats</u> $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}}$

c) $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1/2} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \boxed{-\tfrac{2}{3}} \; \boxed{\tfrac{2}{3}} \; \cdot -\tfrac{2}{3} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2/3 & -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right] \boxed{1/2} \cdot -\tfrac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

<u>Slutsats:</u> $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

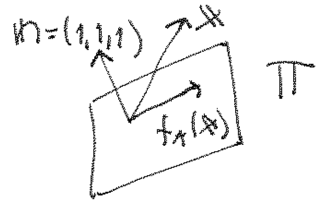
d) Från räkningarna ovan kan vi gissa att

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Kontrollera detta genom att multiplicera ihop dem. Vi hade förstås kunnat gissa oss till inversen i c) också, om inte innan Gausselim, så kanske efter några steg.

<u>Kommentar</u>: Låt $\mathbb{1}$ vara $n\times n$-matrisen med alla element $= 1$. Då $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbb{1} - I$. Obs att $(\mathbb{1} - I)(\mathbb{1} - (n-1)I) = \mathbb{1}\cdot\mathbb{1} - n\mathbb{1}\cdot I + (n-1)\cdot I \cdot I$
$= n\mathbb{1} - n\mathbb{1} + (n-1)I = (n-1)I$. Alltså $(\mathbb{1} - I)^{-1} = \frac{1}{n-1}(\mathbb{1} - (n-1)I)$

TMA 660 27/10 14



4) $f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal proj på

$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ $\quad \Pi: x+y+z=0$

Obs: en normalvektor till Π är $\mathbf{n} = (1,1,1)$

Minns: $\mathrm{Noll}(A) = \{\mathbf{x}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

Alltså $\mathrm{Noll}(A) = \{\mathbf{x}$ ortogonal mot $\Pi\} = \{\mathbf{x} = t(1,1,1),\ t \in \mathbb{R}\}$

Obs $f_A(\mathbb{R}^3) = \Pi$ $\quad$ Minns $\mathrm{Kolonn}(A) = f_A(\mathbb{R}^3)$ Alltså $\mathrm{Kolonn}(A) = \Pi$

Slutsats: $\mathrm{Kolonn}(A)$ = planet $x+y+z=0$

$\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Kolonn}(A)) = 2$

$\mathrm{Noll}(A)$ = linjen $t(1,1,1)$ $t \in \mathbb{R}$

$\mathrm{nolldim} = \dim(\mathrm{Noll}(A)) = 1$

---

5) Givet $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x+yi$ $\quad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (3+i)z$ $\quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto g^{-1} \circ f \circ g(\mathbf{x})$

Obs: $g^{-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$

Minns: avbildningsmatrisen till F ges av $A = \begin{bmatrix} | & | \\ F(\mathbf{e}_1) & F(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix}$

$F(\mathbf{e}_1) = F(1,0) = g^{-1}(f(g(1,0))) = g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(3+i) = (3,1)$

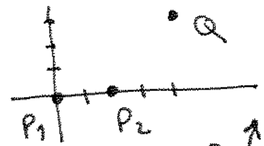
$F(\mathbf{e}_2) = F(0,1) = g^{-1}(f(g(0,1))) = g^{-1}(f(i)) = g^{-1}((3+i)i) =$

$g^{-1}(3i-1) = (-1,3)$

Slutsats: F's avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

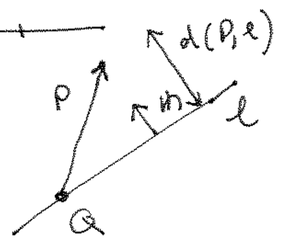
---

6) Givet $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $Q = (4,3)$.



Låt $d(P,\ell)$ beteckna avståndet mellan punkten P och linjen ℓ.

Vi vill hitta $\ell \ni Q$ så att $d(P_1,\ell) = d(P_2,\ell)$.



Låt $\mathbf{n}$ vara en normalvektor till ℓ med $|\mathbf{n}|=1$. Då ges projektionsformeln att

$d(P,\ell) = |\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}|$ där Q är en godtycklig punkt på ℓ.

Linjen vi söker skall alltså ha en normalvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ som uppfyller

$|\overrightarrow{P_1Q} \cdot \mathbf{n}| = |\overrightarrow{P_2Q} \cdot \mathbf{n}| \Leftrightarrow |(4,3) \cdot \mathbf{n}| = |(2,3) \cdot \mathbf{n}| \Leftrightarrow$

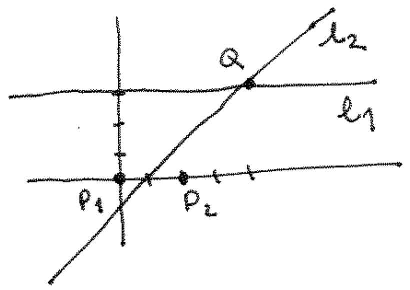
$|4n_1 + 3n_2| = |2n_1 + 3n_2| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4n_1 + 3n_2 = 2n_1 + 3n_2 \Rightarrow n_1 = 0 \\ \text{eller} \\ 4n_1 + 3n_2 = -2n_1 - 3n_2 \Leftrightarrow 6n_1 + 6n_2 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -n_2 \end{cases}$$

6) forts.
Det finns alltså två linjer med de önskade egenskaperna.

	$n=(n_1,n_2)$	$\Rightarrow$ linjens ekvation $n_1x+n_2y=d$	Q ligger på linjen, bestämmer d
Fall 1	$(0,1)$	$y=d$	$3=d$
Fall 2	$(1,-1)$	$x-y=d$	$4-3=d \Leftrightarrow d=1$

Slutsats: Det finns två linjer l_i som innehåller Q och uppfyller $d(P_1,l_i)=d(P_2,l_i)$, nämligen $l_1: y=3$
$l_2: x-y=1$



7) Se Sparr kap 5.3

8 a) Se Sparr kap 7.8

b) Det finns i allmänhet inte en entydig lösning till $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ (*)
(Speciellt är det ju så att om $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ är lösbart så är varje lösning till $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ en lösning till $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, och $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ har ju inte alltid en entydig lösning.)

Låt t ex $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

Då är (*): $\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

som har lösningen $\mathbf{x}=t(1,-1)$, $t\in\mathbb{R}$