MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2015-08-17 kl. 8.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Gustav Kettil
Telefon: 0703 088 304

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 24 p, 4: 36 p, 5: 48.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. (4 p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för kolonnrummet till A, rangen av A och nolldimensionen av A. (4 p)

2. (a) Lös matrisekvationen

$$AXB = C$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

(b) Hur många lösningar har matrisekvationen

$$AXB = C$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}?$$

(3 p)

3. Lös ekvationen

$$z^4 + (3+3i)z^3 + (4+4i)z^2 + (12+12i)z + 16i = 0.$$

Tips: det finns minst en rent imaginär rot. (7 p)

4. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara moturs rotation med $\pi/2$ radianer kring z-axeln, d v s (x, y, z) avbildas på $\big(\rho(x, y), z\big)$, där $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är moturs rotation med $\pi/2$ radianer. Låt $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara moturs rotation med $\pi/2$ radianer kring x-axeln, d v s $g(x, y, z) = \big(x, \rho(y, z)\big)$. (8 p)

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för $f \circ g$.

(b) Vilka punkter avbildas på sig själv under avbildningen $f \circ g$?

(c) Gäller det att $f \circ g = g \circ f$? Motivera!

5. I följande uppgift räcker det med svar.

(a) Ange en punkt i planet $3x + y - 4z = 1$. (1 p)

(b) Ange en matris av typ 3×3 som inte är inverterbar. (1 p)

(c) Ange en vektor ortogonal mot $(1, 2, 3)$. (1 p)

(d) Ange en matris med nolldimension 1. (1 p)

(e) Ange en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som inte är linjär. (1 p)

(f) Ange en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som är linjär och inverterbar. (1 p)

(g) Ange 3 punkter P, Q, R i planet $\mathbb{R}^2$ så att triangeln med hörn i P, Q, R har area 1. (2 p)

6. En ljusstråle med riktningsvektor $(1, 0, 0)$ reflekteras i ett plan Π som går genom punkten $(3, -5, 7)$. Den reflekterade ljusstrålen har riktningsvektor $(1, -2, -2)$. Bestäm en ekvation för Π. (8 p)

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icketrivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. Låt A vara en $(n \times n)$-matris.

(a) Visa att om det finns en matris V så att $VA = I$ (V är en vänsterinvers till A), då har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (3 p)

(b) Visa att om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, då finns en matris H så att $AH = I$ (H är en högerinvers till A). (3 p)

(c) Visa att om det finns en matris V så att $VA = I$ och en matris H så att $AH = I$, då är $V = H$. (2 p)

Lycka till!
Elizabeth