

Linjär algebra och numerisk analys, 2017

Bonusuppgift nummer 1: Grafer och flygplansrutter, maximalt 3 bonuspoäng

En så kallad **riktad graf** består av ett antal numrerade **noder** (punkter) sammanbundna med **riktade länkar** (pilar). I exemplet i figur 1 har vi 4 noder och 6 riktade länkar.

Kopplingsmatrisen till en riktad graf definieras som matrisen A med element

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om det finns en länk från } i \text{ till } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

Kopplingsmatrisen till den riktade grafen i figur 1 är alltså $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tillämpning: Flygrutterna hos ett flygbolag kan beskrivas med en riktad graf där flygplatserna är noder och direktrutterna är riktade länkar. Anta att ett flygbolag i Kalifornien har följande enkla flygningar (direktrutter).

från	till
San Francisco	Fresno
San Francisco	Monterey
Los Angeles	San Francisco
Los Angeles	Sacramento
Sacramento	San Francisco
Sacramento	Fresno
Fresno	Sacramento
Fresno	Los Angeles
Monterey	Los Angeles

Uppgifter:

- Numrera städerna enligt: (1) Los Angeles, (2) San Francisco, (3) Monterey, (4) Fresno, (5) Sacramento och rita (för hand) motsvarande graf.
- Ta fram kopplingsmatrisen och lägg in den i MATLAB.
- Beräkna matrisen A^2 i MATLAB. Elementet på plats (i, j) i A^2 är antalet rutter från plats i till plats j som använder exakt två enkla flygningar dvs exakt en mellanlandning. **Förklara detta i detalj** genom att studera hur elementet på plats $(2, 1)$ i A^2 räknas fram från matrisen A genom en skalärprodukt.
- Beräkna $A + A^2$. Vad säger elementet på plats (i, j) i denna matris om flygningar?
- Antag att du vill åka från en godtycklig stad till en annan godtycklig stad. Vilket är det största antal flygningar som du behöver göra? Ta reda på det genom lämpliga beräkningar med aktuella matriser i MATLAB. **Förklara med matrisalgebra** hur du får fram svaret.
- I visst avseende är flygningen Sacramento - San Francisco viktig för flygbolaget. Vad händer om den flygningen läggs ned? Vad blir i så fall svaret i e)-uppgiften?

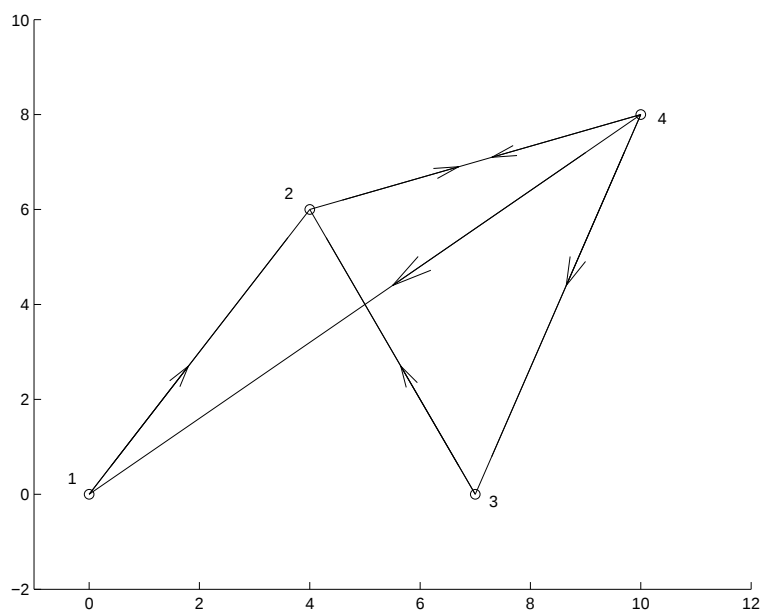


Figure 1: En riktad graf med 4 noder och 6 riktade länkar

g. Räcker det att addera **endast en enkel flygning** så att man kan flyga mellan vilka två städer som helst med **högst en mellanlandning**? Om inte - hur många ytterligare flygningar behöver man minst addera så att detta går? Förklara hur du gör för att lösa uppgiften.

Inlämning. Graf, efterfrågade matriser och svar på frågorna med förklaringar genom matrisalgebra.