

## Linjär algebra och numerisk analys, 2016

### Bonusuppgift nummer 4: Linjärt ekvationssystem, kondition och stabilitet, maximalt 4 bonuspoäng

Hilbertmatrisen  $H$  av ordning  $n \times n$  definieras genom elementen  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$  och genereras i MATLAB med kommandot `hilb`.

#### Uppgifter:

- a. Bestäm för  $n = 1, 2, \dots$ , Hilbertmatrisen av ordning  $n \times n$  och beräkna  $b = Hx$ , där  $x$  är vektorn med enbart ettor. Lös systemet  $Hx = b$  med backslash i MATLAB och låt lösningen vara  $\hat{x}$ .
- b. Beräkna felet  $\hat{x} - x$  och residualen  $r = b - H\hat{x}$ . Hur stort kan  $n$  vara innan approximationen  $\hat{x}$  blir oanvändbar?
- c. Rita ut normen av felet,  $\|\hat{x} - x\|_2$  som funktion av  $n$  och normen av residualen  $\|r\|_2$  som funktion av  $n$ . Gör detta endast för  $n$ -värden som du bedömt ge en användbar approximation i b)-uppgiften. Vad drar du för slutsats? Är residualen ett bra mått på felets storlek i allmänhet? Om inte, vad är i så fall residualen ett mått på?
- d. Beräkna konditionstalet  $\kappa(H)$  för  $H$  med `cond` i MATLAB. Försök karakterisera  $\kappa(H)$  som funktion av  $n$  för  $n$ -värden som du bedömt användbara i b)-uppgiften. Hur relaterar felet  $\|\hat{x} - x\|_2$  till konditionstalet? Jämför med teorin för störningsanalys enligt avsnitt 5.6 i *Numerisk Analys*.

**Inlämning.** Svar på frågorna med grafik och körningsresultat som underlag.