Noggrannhet till enstegsmetoder för ODE

Vi betraktar ett autonomt BVP

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)), \qquad t \geq t_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

där $y(t) \in \mathbb{R}^n$, och $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

På (1) tillämpar vi en enstegsmetod, som vi abstrakt kan skriva

$$y_{k+1} = \Phi_f(y_k, h), \qquad n = 0, 1, \ldots y_0 \quad = y_0 \tag{2}$$

Det lokala trunkeringsfelet er definierad som $L_{k+1} = y_{k+1} - u_k(t_{k+1})$, där $u_k(t)$ löser samma ODE som $y(t)$, men med begynnelsesvärdet $u_k(t_k) = y_k$.

För att få fram det lokala trunkeringsfelet, kan vi Taylorutveckla

$$u_k(t_{k+1}) = u_k(t_k + h)$$

och

$$y_{k+1} = \Phi_f(y_k, h)$$

i variabeln h.

Då $u_k(t)$ löser samma differentialekvation som $y(t)$ och vi använder samma metod i alla tidsstegen, räcker det att studera fallet $k = 0$ och Taylorutveckla $y(t_0 + h)$ och y_1 som funktioner av h.

1 Notation

I Taylorutvecklingen kommer vi att behöva fs derivata. Vi definierar, för $y, u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f'(y) \cdot u &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(y + \varepsilon u)\bigg|_{\varepsilon=0}, \\ f''(y)(u, v) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} f(y + \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v)\bigg|_{\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Från egenskaperna till derivata, kan vi visa att $f'(y) \cdot u$ är linjär i u, och $f''(y)(u, v)$ är linjär i båda u och v. Vidare kan vi visa att om $g(y) = f'(y) \cdot v$, så är $g'(y) \cdot u = f''(y)(u, v)$ och att $f''(y)(u, v) = f''(y)(v, u)$.

I koordinater kan vi skriva $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$ och

$$\mathbf{f}'(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{y})}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{f}''(\mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f_1''(\mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ f_n''(\mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix},$$

där

$$f_i''(\mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{y})}{\partial y_j \partial y_k} u_j v_k.$$

2 Taylorutveckling av den exakta lösningen

Från differentialekvationen

$$y'(t) = f(y(t))$$

kan vi derivera på båda sidor av likhetstecknet, och vi får (skriver inte beroende på t explicit)

$$\begin{aligned} y'' &= f'(y) \cdot y', \\ y^{(3)} &= f''(y)(y', y') + f'(y) \cdot f'(y) \cdot y', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Om vi evaluerar i $t = t_0$, och sätter in, får vi att

$$\begin{aligned} y'(0) &= f(y_0), \\ y''(0) &= f'(y_0) \cdot f(y_0), \\ y^{(3)}(0) &= f''(y_0)(f(y_0), f(y_0)) + f'(y_0) \cdot f'(y_0) \cdot f(y_0), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Taylorutvecklingen blir

$$y(t_0+h) = y_0+hf(y_0)+\frac{h^2}{2}f'(y_0)\cdot f(y_0)+\frac{h^3}{6}(f''(y_0)(f(y_0), f(y_0))+f'(y_0)\cdot f'(y_0)\cdot f(y_0))+\cdots \tag{3}$$

3 Taylorutveckling av enstegsmetoder

3.1 Euler framåt

För Euler framåt har vi

$$y_1(h) = y_0 + hf(y_0),$$

som är linjär i h. Taylorutvecklingen är därmed också

$$y_1(h) = y_0 + hf(y_0),$$

och vi kan få fram det lokala trunkeringsfelet

$$\begin{aligned} L_1(h) &= y_1(h) - y(t_0 + h) = y_0 + hf(y_0) - \left(y_0 + hf(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) \cdot f(y_0) + \cdots \right) \\ &= -\frac{h^2}{2} f'(y_0) \cdot f(y_0) + \cdots \end{aligned}$$

3.2 Euler bakåt

För Euler bakåt är y_1 lösningen av ekvationen

$$y_1(h) = y_0 + hf(y_1(h))$$

för att Taylorutveckla $y_1(h)$ kan vi derivera ekvationen med avseende på h.

$$\begin{aligned} y_1' &= f(y_1) + hf'(y_1) \cdot y_1' \\ y_1'' &= 2f'(y_1) \cdot y_1' + h\left(f''(y_1)(y_1', y_1') + f'(y_1) \cdot y_1''\right) \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Om vi evaluerar i $h = 0$ och sätter in, får vi

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_0 \\ y_1'(0) &= f(y_0) \\ y_1''(0) &= 2f'(y_0) \cdot f(y_0) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Taylorutvecklingen blir då

$$y_1(h) = y_0 + hf(y_0) + h^2 f'(y_0) \cdot f(y_0) + \cdots$$

Och det lokala trunkeringsfelet

$$\begin{aligned} L_1(h) &= y_1(h) - y(t_0 + h) \\ &= y_0 + hf(y_0) + h^2 f'(y_0) \cdot f(y_0) + \cdots - \left(y_0 + hf(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) \cdot f(y_0) + \cdots \right) \\ &= \frac{h^2}{2} f'(y_0) \cdot f(y_0) + \cdots \end{aligned}$$

Båda Euler framåt och Euler bakåt har lokalt trunkeringsfel $L_k \sim h^2$, (dvs, med ledande term proportional med h^2) och har ordning 1. Generellt säger vi att en metod har *ordning* p om den har lokalt trunkeringsfel $L_k \sim h^{p+1}$