MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2017**
Chalmers tekniska högskola **2017–10–07 kl 08:30-12:30**
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742 **Hjälpmedel: Inga**

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen - Lösning

---

1. Låt A vara matrisen **(8 p)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm för vilka $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning. (2 p) **Lösning:**Matrisen har rang 2, så ekvationen har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Låt nu A vara en godtycklig reell $n \times m$-matris, och anta att ekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Visa att ekvationen $A^\top \mathbf{y} = 0$ endast har den triviella lösningen $\mathbf{y} = 0$ (4 p) **Lösning:**Vi har att $V(A) = \mathbb{R}^n$. Det innebär att

$$N(A^\top) = V(A)^\perp = (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$$

där $\{0\}$ är underrrummet som består av endast nollvektorn.

(c) Matrisen från (b) har kompakt singulärvärdesdekomposition $A = U\Sigma V^\top$. Vad är dimensionerna till U, Σ och V? (2 p) **Lösning:**Matrisen har $\operatorname{rank}(A) = \dim V(A) = n$. Då är $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, och vi ser att

$$\begin{gathered} U \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ V^\top \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow \\ V \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{gathered}$$

2. Vi betraktar en funktion $F\colon P_2 \to P_2$ där **(10 p)**

$$F(p)(t) = (t-1)p'(t) + p(t)$$

för alla t. ($F(p)(t)$ är polynomen $F(p)$, evaluerad i t.)

(a) Visa att F är en linjär avbildning. (3 p) **Lösning:**Vi har att för $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q \in P_2$ så är

$$\begin{aligned} F(\alpha p + \beta q)(t) &= (t-1)\,(\alpha p + \beta q)'\,(t) + (\alpha p + \beta q)(t) \\ &= \alpha\,\big((t-1)p'(t) + p(t)\big) + \beta\,\big((t-1)q'(t) + q(t)\big) \\ &= \alpha F(p)(t) + \beta F(q)(t) \\ &= (\alpha F(p) + \beta F(q))\,(t) \end{aligned}$$

I P_2 använder vi standardbasen $\{q_1, q_2, q_3\}$, där

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t, \qquad q_3(t) = t^2,$$

(b) Beräkna matrisen för F i standardbasen. (3 p) **Lösning:**

Beräknar

$$\begin{aligned} F(q_1)(t) &= 1 \\ F(q_2)(t) &= 2t - 1 \\ F(q_3)(t) &= 3t^2 - 2t \end{aligned}$$

Matrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Bestäm alla par (λ, p), där $\lambda \in \mathbb{R}$ och $p \in P_2$ som uppfyller (4 p)

$$F(p) = \lambda p$$

Lösning: Vi ska här lösa ett egenvärdesproblem. Vi kan lösa det i koordinater, då ska vi bestämma egenvärden och egenvektorerna till matrisen A. Då matrisen är diagonal ser vi att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$, och vi kann lösa för egenvektorerna och får att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De motsvarande polynomen är

$$p_1(t) = 1 \qquad p_2(t) = t - 1 \qquad p_3(t) = t^2 - 2t + 1$$

Egenvektorer är endast bestämda upp till mulitplikation med en skalär, så alla egenpar är mängden

$$\{(1, \alpha p_1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(2, \alpha p_2) \colon \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(3, \alpha p_3) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$

3. I den här uppgiften kan du använda att **(10 p)**

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} \mathrm{d}t = n! \qquad \text{För } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Visa att

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(t) q(t) e^{-t} \mathrm{d}t$$

är ett skalärprodukt på rummet av polynom P. (4 p) **Lösning:**Integralen är väl definerad, då för alla p och q, är $p(t)q(t)$ igen ett polynom på formen

$$p(t)q(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

och integralet

$$\int_0^\infty p(t) q(t) e^{-t} \mathrm{d}t$$

kan även beräknas exakt vid den uppgivna formeln.

Formeln är uppenbart bilinjär och symmetrisk i p och q.

Vi har även att

$$\langle p, p \rangle = \int_0^\infty p(t)^2 e^{-t} \mathrm{d}t$$

är ett integral av en kontinuerlig icke-negativ funktion för alla p. Då är integralen icke-negativ, och den är 0 endast om integranden är like 0 för alla $t \in [0, \infty)$. Om $p(t)^2 e^{-t} = 0$, så är även $p(t) = 0$ för alla t.

(b) Beräkna en ortonormerad (i skalärproduktet från a) bas för rummet av polynom av grad högst ett P_1. (3 p) **Lösning:**

$$e_1 = 1 \qquad e_2 = t - 1$$

(c) Beräkna det förstagradspolynom p som minimerar (3 p)

$$\int_0^\infty (p(t) - t^2)^2 e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Lösning: Uppgiften lösas av den ortogonala projektionen av $q(t) = t^2$ på P_1. Vi har

$$p = \langle q, e_1\rangle e_1 + \langle q, e_2\rangle e_2 = 2e_1 + 4e_2 p(t) \quad = 4t - 2$$

4. Antag att A är en symmetrisk reell $n \times n$ matris så att $A^2 = A$. **(10 p)**

(a) Visa att A inte kan ha andra egenvärden än 0 och 1. (3 p) **Lösning:**Om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med $\mathbf{v} \neq 0$, så är

$$A^2\mathbf{v} = A\mathbf{v} \Rightarrow \lambda^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0.$$

som innebär att λ är lika med 0 eller 1.

(b) Låt $r = \operatorname{rank} A > 0$. Visa att det finns en $n \times r$-matris Q så att Q har ortonormala kolumner och (3 p)

$$A = QQ^\top.$$

Lösning:
A är symmetrisk, så vi kan använda spektralsatsen. Från (a) vet vi att egenvärden är 0 och 1, och från $\operatorname{rank} A = r$ vet vi att det finns r linjärt oberoende egenvektorer tillhörande 1, och $n - r$ linjärt oberoende egenvektorer tillhörande 0. Ordnar vi egenvärdene med ettor först har vi blockformen

$$A = VDV^\top = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\top \\ V_2^\top \end{bmatrix} = V_1 V_1^\top.$$

där kolumnerna i V_1 är en ortonormerad bas för egenrummet $E(1)$. $Q = V_1$ uppfyller alltså ekvationen.

(c) Visa att avbildningen

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

är en ortogonal projektion på ett underrum $U \subset \mathbb{R}^n$. (4 p) **Lösning:**Låt $U = V(A) = E(1)$. Då är $A\mathbf{x} \in U$. För alla $\mathbf{u} \in U$ kan vi skriva $\mathbf{u} = Q\mathbf{y}$ och vi har

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - A\mathbf{x}\rangle =& \langle Q\mathbf{y}, \mathbf{x} - QQ^\top\mathbf{x}\rangle \\
=& \mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{x} - \mathbf{y}^\top Q^\top QQ^\top \mathbf{x} \\
=& \mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{x} - \mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{x} \qquad (\text{Då } Q^\top Q = I_r \text{ pga. ortonormala kolumner}) \\
=& 0
\end{aligned}$$

5. En CPU i en dator räknar flyttalsoperationer med addition, subtraktion och multiplikation på samma sätt som vi räknar på papper. (Fast i binära tal.) För divisionen $\frac{1}{d}$ använder några CPUer Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. **(8 p)**

(a) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. Ditt svar ska inte innehålla division. (3 p) **Lösning:**

$$x_{n+1} = x_n + (x_n - dx_n^2) = 2x_n - dx_n^2$$

(b) Visa att för det relative felet

$$\frac{\delta x_n}{x^*} = \frac{x_n - x^*}{x^*}$$

gäller (3 p)

$$\frac{\delta x_{n+1}}{x^*} = -\left[\frac{\delta x_n}{x^*}\right]^2$$

Lösning: Vi vet att $x^* = \frac{1}{d}$, och skriver $x_n = \frac{1}{d} + \delta x_n$ då har vi

$$\begin{aligned} x_{n+1} =& \frac{2}{d} + 2\delta x_n - d\left(\frac{1}{d^2} - 2\frac{\delta x_n}{d} - (\delta x_n)^2\right) \\ =& \frac{1}{d} - d(\delta x_n)^2 \end{aligned}$$

och vi har

$$\frac{\delta x_{n+1}}{x^*} = d(x_{n+1} - \frac{1}{d}) = -d^2(\delta x_n)^2 = -\left[\frac{\delta x_n}{x^*}\right]^2$$

Newtons metod måste kombineras med något startvärde x_0, och antal iterationer som behövs beror på hur nära startvärdet är den faktiska lösningen och hur stor precision som önskas i slutresultatet.

(c) Vi önskar att $\frac{1}{d}$ ska beräknas med relativt fel mindra än 10^{-16} till belopp i fyra iterationer. Hur noggrann måste startapproximationen x_0 vara? (2 p) **Lösning:**Felet kvadreras i varje iteration, så vi måste ha. Vi måste ha $\left|x_0 - \frac{1}{d}\right| \leq 10^{-1}$

(I faktiska implementationer av den här algoritmen, använder man en linjär approximation till $\frac{1}{d}$ på intervallet $1 \leq d \leq 2$, och kan då ha ett relativt fel mindre enn $\frac{1}{17}$.)

6. I QR-algoritmen beräknas egenvärden till en matris A_0 genom att successivt beräkna **(8 p)**

$$\begin{aligned} Q_n R_n &= A_n \qquad \text{(full QR-faktorisering)} \\ A_{n+1} &= R_n Q_n \end{aligned}$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Visa att A_n har samma egenvärden som A_0. (3 p) **Lösning:**$A_{n+1} = Q_n^\top A_n Q_n$ medför att A_{n+1} och A_n är similära, och har gemensamma egenvärden. Vid induktion följer att A_n och A_0 är similära.

(b) Det upplysas att om metoden konvergerar, så vill $Q_n \to I$. Forklara hur du kan estimera A_0's egenvärden från A_n. (3 p) **Lösning:**Ser att då $Q_n \to I$ så vill $A_n - R_n \to 0$, det vill säga att A_n går mot att vara uppåt triangulär. Uppåt triangulära matriser har egenvärderna på diagonalen, så vi kan approximera A_ns med dens diagonalelement.

(c) Antag att A_0 är reell, men har komplexa egenvärden. Förklara varför QR-algoritmen inte kan konvergera i det här fallet. (2 p) **Lösning:**Matriserna i QR-algoritmen är alltid reella, därför kan inte matrisen A_n gå mot en matris med egenvärderna till A_0 på diagonalen.

7. Enligt en modell utvecklar populationerna av harar (x) och rävar (y) på en ö sig enligt en differentialekvation: **(6 p)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - xy$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}xy - y$$

Där x och y representerar antal tusen individer. (Den här modellen kallas Lotka–Volterra modellen).

(a) Låt startpopulationerna vara $x(0) = 1$ och $y(0) = 4$ och använd ett steg med Euler framåt för att beräkna en approximasjon av $x(0.25), y(0.25)$. (3 p) **Lösning:**

$$x(0.25) \approx x_1 = x_0 + h\,(2x_0 - x_0 y_0)$$
$$y(0.25) \approx y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{2}x_0 y_0 - y_0\right)$$

Med $x_0 = 1, y_0 = 4, h = 0.25$ får vi

$$x_1 = 0.5, \quad y_1 = 3.5$$

(b) Euler framåt fungerar tyvärr inte särskild bra på den här ekvationen. Förklara vilket problem som kan uppstå om vi använder Euler framåt med för lång steglängd. (Hint: När är modellen meningsfull?). (3 p) **Lösning:**Modellen är bara meningsfull för positiva x och y. Vi ser att med t.ex. samma startvärden som i (a), men med steglängd större än 0.5, blir $x_1 < 0$. (Faktisk så kommer problemet att uppstå med även mindre steglängd, men kanske efter flera steg.)