TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentalösning

MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2017**
Chalmers tekniska högskola **2017–08–19 kl 08:30-12:30**

1. Vi betraktar funktionen $F\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ (där P_2 är rummet av polynom av grad högst 2) given av **(10 p)**

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att F är en linjär avbildning. (3 p)

Lösning: Vi må visa att för alla polynomer p och q i P_2, och alla reella tal α, β gäller

$$F(\alpha p + \beta q) = \alpha F(p) + \beta F(q)$$

I det aktuella tillfället har vi

$$F(\alpha p + \beta q) = \begin{bmatrix} (\alpha p + \beta q)(1) \\ (\alpha p + \beta q)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha p(1) + \beta q(1) \\ \alpha p(2) + \beta q(2) \end{bmatrix} =$$
$$= \alpha \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \end{bmatrix} = \alpha F(p) + \beta F(q)$$

I P_2 använder vi basen $\{q_1, q_2, q_3\}$, där

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t, \qquad q_3(t) = t^2,$$

och i $\mathbb{R}^2$ använder vi standardbasen.

(b) Beräkna matrisen för F i de uppgivna baserna. (3 p)

Lösning: Vi evaluerar $F\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ i basvektorerna för P_2.

$$F(q_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad F(q_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad F(q_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matrisen för F blir

$$A = \begin{bmatrix} F(q_1) & F(q_2) & F(q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Bestäm nollrummet till F, $N(F) \subseteq P_2$. (2 p)

Lösning: Här kan man radredusera A, men vi kan också observera att nollrummet till F består av de polynom av grad 2 som har $p(1) = p(2) = 0$, det vill säga polynom med faktor $(t-2)(t-1)$

$$N(F) = \{p \,:\, p(t) = \alpha(t-2)(t-1), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Funktionen $G\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ är given av

$$G(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

(d) Bestäm en bas för P_2 så att matrisen för G i den basen och standardbasen för $\mathbb{R}^3$ är nedåt triangulär. (2 p)

Hint: Tänk interpolationspolynom.

Lösning: Det finns oändligt många lösningar. Det som behövs är 3 polynom i P_2, $\{f_1, f_2, f_3\}$ så att

- f_1, f_2, f_3 är linjärt oberoende (annars ingen bas).
- Matrisen till G,
$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \end{bmatrix},$$
är nedåt triangulär.

Det andra kravet medför att

$$f_3(0) = f_3(1) = 0 \;\Rightarrow\; f_3(t) = \alpha t(t-1),$$

där $\alpha \in \mathbb{R}$, och att

$$f_2(0) = 0 \;\Rightarrow\; f_2(t) = tp(t),$$

där p är ett polynom av grad högst 1. Vi kan t.ex. sätta $\alpha = 1$ och $p(t) = 1$, så $f_2(t) = t, f_3(t) = t(t-1)$. Nu har alla polynomen i rummet uppspänd av f_2 och f_3 konstant lika 0, så för att få en bas, måste f_1 ha konstant olika noll. För enkelhetens skuld, sätter vi $f_1 = 1$.

2. Låt **(10 p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Lös minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|.$$

Lösning: Normalekvationerna är

$$A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

med lösning

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Låt B vara en $n \times m$-matris med där $n \geq m$ och anta att $B = QR$, där Q är en $n \times m$-matris med ortonormala kolumner, och R en uppåt triangulär $m \times m$-matris utan nollor på diagonalen. Låt vidare $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Visa att de två ekvationssystemen

$$B^\top B\mathbf{x} = B^\top \mathbf{c},$$
$$R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{c}$$

er ekvivalenta (har samma lösning). (4 p)

Lösning: Då $B = QR$, har vi $B^\top = R^\top Q^\top$ och då Q har ortonormala kolumner, gäller det att $Q^\top Q = I$.

$$B^\top B = (R^\top Q^\top)Q^\top R = R^\top(Q^\top Q)R = R^\top R$$

Vi har därför

$$B^\top B\mathbf{x} = B^\top \mathbf{c} \;\Leftrightarrow R^\top R\mathbf{x} = R^\top Q^\top \mathbf{c}$$

$R^\top$ är inverterbar, då det är en nedåt triangulär matris utan nollor på diagonalen, så vi har även

$$R^\top R\mathbf{x} = R^\top Q^\top \mathbf{c} \Leftrightarrow R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{c}.$$

(c) Visa att den gemensamma lösningen till de två ekvationssystemen är lösning till minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} \|B\mathbf{x} - \mathbf{c}\|.$$

Lösning: Vi visar att minsta kvadrat-problemet lösas av normalekvationerna.

Låt P vara matrisen till den ortogonala projektionen på rummet uppspänd av Bs kolumner $= V(B) \subset \mathbb{R}^n$. P är definierad vid att $P\mathbf{y} \in V(B)$ och $\mathbf{y} - P\mathbf{y} \in V(B)^\perp$. Från Pythagoras har vi att

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|P\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y} - P\mathbf{y}\|^2$$

Specifikt gäller det för vektorn $\mathbf{y} = B\mathbf{x} - \mathbf{c}$.

För godtycklig $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, gäller $PB\mathbf{x} = B\mathbf{x}$, då $B\mathbf{x} \in V(B)$, så vi har att

$$P\mathbf{y} = PB\mathbf{x} - P\mathbf{c} = B\mathbf{x} - P\mathbf{c}$$

och

$$\mathbf{y} - P\mathbf{y} = P\mathbf{c} - \mathbf{c}$$

För normen har vi nu

$$\|B\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 = \|B\mathbf{x} - P\mathbf{c}\|^2 + \|P\mathbf{c} - \mathbf{c}\|^2$$

Andra ledet kan vi inte påverka genom att ändra $\mathbf{x}$, men första kan vi göra lika noll genom att lösa ekvationen

$$B\mathbf{x} = P\mathbf{c}.$$

Ekvationen har en lösning då $P\mathbf{c} \in V(B)$.

Den faktiska ekvationen för $\mathbf{x}$, får vi genom att använda att

$$P\mathbf{c} - \mathbf{c} = B\mathbf{x} - \mathbf{c} \in V(B)^\perp = N(B^\top) \Leftrightarrow B^\top(B\mathbf{x} - B^\top\mathbf{c}) = 0$$

3. Är **(4 p)**

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$$

ett skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$? Varför/varför inte?

Lösning: Uttrycket är båda symmetrisk i $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ och linjärt i vart av argumenten, men det är inte ett skalärprodukt, då

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = x_1^2 - x_2^2$$

kan vara negativt.

4. Låt **(5 p)**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm As egenvärden och egenvektorer. (2 p)

Lösning:

$$\det A - \lambda I = \lambda^2 - 25$$

med lösning $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -5$. Egenvektorerna fås genom att lösa

$$(A - 5I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$(A + 5I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som ger

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

där α och β är godtyckliga reella tal olika 0.

(b) Lös begynnelsesvärdeproblemet (3 p)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = A\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) & = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Lösning: Ekvationen lösas genom att använda en bas av egenvektorer för A. Vi sätter

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Om $\mathbf{y}(t) = z_1(t)\mathbf{v}_1 + z_2(2)\mathbf{v}_2$, blir differentialekvationen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= A\mathbf{y}(t) \\ z_1'(t)\mathbf{v}_1 + z_2'(t)\mathbf{v}_2 &= z_1(t)A\mathbf{v}_1 + z_2(t)A\mathbf{v}_2 \\ &= 5z_1(t)\mathbf{v}_1 - 5z_2(t)\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Det vill säga att

$$\begin{aligned} z_1'(t) = 5z_1(t) \Rightarrow &\quad z_1(t) = e^{5t}z_1(0) \\ z_2'(t) = -5z_2(t) \Rightarrow &\quad z_2(t) = e^{-5t}z_2(0) \end{aligned}$$

För att bestämma $z_1(0)$ och $z_2(0)$ löser vi ekvationen

$$z_1(0)\mathbf{v}_1 + z_2(0)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

med lösning $z_1(0) = \frac{1}{2}$, $z_2(0) = -\frac{1}{2}$. Vi får att

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = z_1(t)\mathbf{v}_1 + z_2(2)\mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2}e^{5t}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}e^{-5t}\mathbf{v}_2 \\ = &\begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{5t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \\ \frac{1}{2}e^{5t} + \frac{3}{2}e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Låt A vara en reell $n \times n$ matris. Anta A har endast ett egenvärde λ och at det finns n linjärt oberoende egenvektorer tillhörande detta egenvärdet. **(6 p)**

(a) Visa att $A = \lambda I$. (3 p)

Lösning: n linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$, så egenrummet tillhörande λ är hela $\mathbb{R}^n$. Därför är $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Låt B vara en symmetrisk reell $n \times n$ matris så att $B^2 = 2B$.

(b) Visa att antingen är $B = 2I$, annars så är B singulär (ej inverterbar). (3 p)

Lösning: Då B är symmetrisk, vet vi att det finns n linjärt oberoende egenvektorer till B (spektralsatsen). Om λ är egenvärde till B med tillhörande egenvektor $\mathbf{v}$, har vi att $B^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} = 2B\mathbf{v} = 2\lambda\mathbf{v}$. Det är endast möjligt om $\lambda = 0$ eller $\lambda = 2$.

Om $\lambda = 2$ det enda egenvärdet till B, är de n linjärt oberoende egenvektorerna till B alla tillhörande $\lambda = 2$. Från (a) vet vi då att $B = 2I$. Om $\lambda = 2$ inte är det enda egenvärdet till B, måste $\lambda = 0$ vara egenvärde till B, och matrisen är därför singulär.

6. Kvadraturformeln Simpsons regel på intervallet $[-1, 1]$ definieras genom att sätta **(9 p)**

$$Q(f) = \int_{-1}^{1} p_2(x)\,\mathrm{d}x$$

där p_2 är andragradspolynomet som interpolerar f i punkterna -1,0 och 1.

(a) Härled Simpsons regel på intervallet $[-1, 1]$ på formen (3 p)

$$Q(f) = w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1).$$

Lösning: Om vi skriver p_2 på formen

$$p_2(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x(x-1)$$

och löser för koefficienterna, får vi

$$p_2(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)) + \frac{x(x-1)}{2}(f(-1) - 2f(0) + f(1))$$

Vi har då

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} p_2(x)\,\mathrm{d}x &= 2f(0) + 0\cdot(f(1) - f(0))\frac{1}{3}(f(-1) - 2f(0) + f(1)) \\ &= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)\end{aligned}$$

(b) Visa att Simpsons regel ger korrekt svar för alla polynom av grad högst 3, men inte för polynom av grad 4. (2 p)

Lösning: Det räcker att visa det på intervallet $[-1, 1]$. Om vi har ett annat intervall, kan vi göra ett linjärt byte av variabel för att få intervallet $[-1, 1]$. Från definitionen är det klart att Simpsons regel ger korrekt svar för alla polynom av grad högst 2. Då båda integration och Simpsons regel är linjära operationer räcker det att se på polynomen x^3 och x^4.

Sätter inn i formeln över och får

$$Q(x^3) = \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}0^3 + \frac{1}{3}1^3 = 0.$$

Då också

$$I(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0$$

ger regeln korrekt svar.

Men

$$Q(x^4) = \frac{1}{3}(-1)^4 + \frac{4}{3}0^4 + \frac{1}{3}1^4 = \frac{2}{3}$$

som inte är lika med

$$I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

Anta att $Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ är en kvadraturformel på intervallet $[-1, 1]$ som bygger på polynominterpolation på delintervall.

(c) Visa att $\sum_{i=1}^{n} w_i = 2$. (2 p)

Lösning: Kvadraturformeln ger exakt svar för funktionen $f(x) = 1$.

(d) Anta att f endast kan beräknas med absoluttfel $|\delta f| = |\hat{f} - f| \leq \Delta$. Visa att för det fortplantade felet $\delta Q(f) = Q(\hat{f}) - Q(f)$ gäller (2 p)

$$|\delta Q(f)| \leq 2\Delta.$$

Lösning: Vi har att

$$Q(\hat{f}) - Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\hat{f}(x_i) - f(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} w_i \delta f(x_i)$$

och att

$$\left| \sum_{i=1}^{n} w_i \delta f(x_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} w_i |\delta f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} w_i |\delta f(x_i)|$$

7. Vi löser ekvationen $f(x) = \sin x + x - \frac{\pi}{2} = 0$ med Newtons metod. **(6 p)**

(a) Visa att ekvationen har exakt en reell lösning x^*, och att den finns i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. (2 p)

Lösning: Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och vi har $f(0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Det innebär att ekvationen har minst en lösning på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Vi har också att $f'(x) = \cos x + 1 \geq 1$ för alla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, så ekvationen kan inte ha mer än en lösning. Äntligen har vi att $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, som innebär att det inte kan existera någon lösning utanför intervallet.

(b) Sätt upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen, och utför ett steg från initialvärdet $x_0 = 0$. (2 p)

Lösning:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin x + x - \frac{\pi}{2}}{\cos x + 1}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

(c) Visa att för $x_k \in (0, \frac{\pi}{2})$ gäller felgränsen (2 p)

$$|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|.$$

Lösning: Vi har från tidigare att $f'(x) \geq 1$ för alla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Från medelvärdessatsen har vi att

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(\xi)(x_k - x^*) = 0 + f'(\xi)(x_k - x^*) \quad \Leftrightarrow \quad (x_k - x^*) = \frac{f(x_k)}{f'(\xi)}$$

för någon ξ mellan x_k och x^*. Då $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ har vi $f'(\xi) \geq 1$, och det följer att

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{1} = |f(x_k)|$$

8. Vi studerar ett system av differentialekvationer **(5 p)**

$$\begin{cases} y'(t) = v(t), \\ v'(t) = -y(t). \end{cases}$$

(Differentialekvationerna beskriver till exempel en harmonisk oscillator.)

(a) Skriv upp iterationsformlerna för Eulers framåtmetod och Eulers bakåtmetod tillämpad på systemet. (3 p)

Lösning: Eulers framåtmetod:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hv_k \\ v_{k+1} &= v_k - hy_k \end{aligned}$$

Eulers framåtmetod:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hv_{k+1} \\ v_{k+1} &= v_k - hy_{k+1} \end{aligned}$$

(b) Utför ett steg med Eulers bakåtmetod där du använder steglängd $h = \frac{1}{2}$ och initialvärderna (2 p)

$$y(0) = 1, \qquad v(0) = 0.$$

Lösning: Eulers bakåtmetod är

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hv_1 \\ v_1 &= v_0 - hy_1, \end{aligned}$$

Genom att sätta in för $h = \frac{1}{2}$, $y_0 = y(0) = 1$, och $v_0 = v(0) = 0$, och flytta över, får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y_1 - \frac{1}{2}v_1 &= 1 \\ v_1 + \frac{1}{2}y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Lösningen är

$$y_1 = \frac{4}{5} v_1 = -\frac{2}{5}$$

9. Vi studerar ett optimeringsproblem **(5 p)**

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

där

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x},$$

och A är positiv definitt $n \times n$-matris, och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Beskriv alla descentriktningar i ett punkt $\mathbf{x}$. (2 p)

Lösning: Descentriktningarna är de riktningar där funktionen avtar. Det vill säga alla riktningar $\mathbf{s}$ så att

$$\nabla f(\mathbf{x})^\top \mathbf{s} < 0$$

För den aktuella funktionen har vi på koefficentform

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

och

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_{ik}x_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1} A_{kj}x_j - b_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki})x_i - b_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ki}x_i - b_k \end{aligned}$$

(I sista likheten har vi använt att A är symmetrisk.) På vektorform har vi då

$$\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

och descentriktingerna i ett punkt $\mathbf{x}$ är alla vektorer $\mathbf{s}$ så att

$$\mathbf{s}^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) < 0$$

(b) Härled formeln för optimal lösning av linjesökingsproblemet $\min_\alpha f(x_k + \alpha x_k)$, (3 p)

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^\top s_k}{s_k^\top A s_k}$$

Lösning: (Använder fet skrift för vektorer i lösningen.) När linjesökingsproblemet lösas optimal ska vi ha att

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k) = \nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s_k})^\top \mathbf{s_k} = 0$$

Från (a) vet vi att $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - b$, det innebär att

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s_k}) = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha A \mathbf{s_k}.$$

Ekvationen för α är därför

$$\left(\nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha A \mathbf{s_k}\right)^\top \mathbf{s}_k = 0.$$

Löser vi ut för α får vi

$$\alpha = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^\top A \mathbf{s}_k}.$$