Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742 **Hjälpmedel: Inga**

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentalösning

MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2017**
Chalmers tekniska högskola **2017–05–29 kl 14:00-18:00**

1. Vi studerar ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar. **(9 p)**

(a) Beskriva LU-faktoriseringen (med eller utan pivotering) av A, och förklara hur du kan använda den till att lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4 p)

Lösning: En LU-faktorisering utan pivotering är en faktorisering $A = LU$ där L är nedåt triangulär med ettor på diagonalen, och U är uppåt triangulär. Vi kan använda den till att lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genom att lösa de två triangulära systemen

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

(b) Låt $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ vara en approximation till $\mathbf{b}$ och $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ lösningen till ekvationen $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$. Härled felgränsen (3 p)

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

där $\|\cdot\|$ betecknar någon vektornorm och tillhörande matrisnorm.

Lösning: Vi har att

$$A\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \Rightarrow \delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow \|\delta\mathbf{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{b}\|$$

och

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Kombineras de två olikheterna, får vi att

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

(c) Låt $A = U\Sigma V^\top$ vara singulärvärdesfaktoriseringen av A. Hur kan du beräkna As konditionstal i 2-normen, $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2$ från U, Σ och V? (2 p)

Lösning: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$, där $\lambda_{\max}$ är största egenvärde till $A^\top A$. Kvadratrötterna till egenvärdena till $A^\top A$ är As singulärvärder, och om singulärvärdena i Σ är ordnat i minskande ordning, är $\|A\|_2 = \sigma_1$. Kan tillsvarande visa att $\left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$, så

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

2. Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ och $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ uppfyllar att $AB = 0_{n\times m}$. Låt $r = \text{Rank}(A)$ och $s = \text{Rank}(B)$. **(9 p)**

(a) Visa att $V(B) \subseteq N(A)$. (3 p)

Lösning: En godtycklig vektor $\mathbf{y}$ i $V(B)$ kan skrivas $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ för någon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Då är

$$A\mathbf{y} = AB\mathbf{x} = 0_{n\times m}\mathbf{x} = 0,$$

så $\mathbf{y} \in N(A)$.

(b) Ange dimensionen till rummet $N(A) \cap V(B)^\perp \subset \mathbb{R}^k$. (2 p)
(Ortogonalt komplement tas med avseende på standardskalärproduktet.)

Lösning: Rummet $N(A) \cap V(B)^\perp$ är mängden av alla vektorer som är i nollrummet till A och står ortogonalt på alla vektorer i $V(B)$. Då $V(B) \subseteq N(A)$ har vi att $N(A) = V(B) \oplus N(A) \cap V(B)^\perp$ är en direkt summa av underrum, och vi har ekvationen

$$\dim N(A) = \dim V(B) + \dim(N(A) \cap V(B)^\perp)$$

Från dimensionssatsen har vi att $\dim N(A) = k - \operatorname{Rank} A = k - r$. Vidare vet vi att $V(B) \subset N(A)$ och att $\dim V(B) = \operatorname{Rank}(B) = s$. Det följer att

$$\dim(N(A) \cap V(B)^\perp) = k - r - s$$

(c) Antag att du har en rutin `null` som tar in en matris C och returnerar en matris D, vars kolonner är en bas för $N(C)$. Förklara hur du kan använda `null` till att beräkna en bas för $N(A) \cap V(B)^\perp$. (4 p)

Lösning: $C_1 = \texttt{null}(A)$ ger oss en bas för $N(A)$, och alla vektorer $\mathbf{y} \in N(A)$ kan skrivas som $C_1\mathbf{x}$ för någon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-r}$. För att en vektor $\mathbf{y} \in N(A)$ även ska ligga i $V(B)^\perp = N(B^\top)$, måste den uppfylla $B^\top \mathbf{y} = 0$, dvs.

$$B^\top C_1 \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in N(B^\top C_1)$$

Sätter vi $C_2 = \texttt{null}(B^\top C_1)$ får vi en bas för alla $\mathbf{x}$ så att $C_1\mathbf{x} \in N(A) \cap V(B)^\perp$. Äntligen får vi en bas för $N(A) \cap V(B)^\perp$ från kolonnerna i $C = C_1C_2$

3. Låt $U \subset \mathbb{R}^3$ vara rummet uppspänt av vektorerna **(6 p)**

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Bestäm en bas för $U^\perp$. (3 p)
(Ortogonalt komplement tas med avseende på standardskalärprodukten.)

Lösning: $U^\perp$ är lika med nollrummet till matrisen

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

vars rader är $\mathbf{v}_1^\top$ och $\mathbf{v}_2^\top$ Vid radredusering, får man att $U^\perp = \operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$ där

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Låt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna den vektor $\mathbf{w} \in U$ som minimerar avståndet till $\mathbf{b}$. (3 p)

Lösning: Vi kan skriva $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi ska minimera $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ – ett minsta kvadratproblem. Lösningen kan till exempel bestämmas genom normalekvationerna

$$A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med lösning

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Då har vi

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

4. **(6 p)**

(a) Visa att (3 p)

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\mathrm{d}t + f(0)g(0)$$

är en skalärprodukt på funktionsrummet $C^1[-1,1]$, (kontinuerligt deriverbara funktioner)

Lösning: Vi måste visa 4 egenskaper.

i. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,

ii. $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$ och

iii. $\langle \alpha f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ är alla uppenbara. Det står kvar att visa att

iv. $\langle f, f\rangle \geq 0$, och $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$. Vi har

$$\langle f, f\rangle = \underbrace{\int_{-1}^{1} (f'(t))^2\mathrm{d}t}_{\geq 0} + \underbrace{f(0)^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

Om $\langle f, f\rangle$ så är båda

$$\int_{-1}^{1} (f'(t))^2\mathrm{d}t = 0 \quad \text{och} \quad f(0)^2 = 0.$$

$\int_{-1}^{1} (f'(t))^2\mathrm{d}t = 0$ implicerar att f' är konstant lika 0 på intervallet $(-1,1)$ det vill säga f är konstant på intervallet $[-1,1]$ $f(0) = 0$ ger konstanten, och vi kan sluta att $f(t)$ är konstant lika 0.

(b) Bestäm en ortogonalbas, (med avseende på skalärprodukten i (a)) för $\mathcal{P}_3$ = rummet av polynom av grad högst 3. (3 p)

Lösning: Vi utför Gram–Schmidt på baspolynomen $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, där $p_k(t) = t^k$. Vi får då

$$
\begin{aligned}
q_0 &= p_0, && q_0(t) = 1 \\
\langle q_0, q_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} 0 \cdot 0 \mathrm{d}t + 1 = 1 \\
\langle p_1, q_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot 0 \mathrm{d}t + 0 \cdot 1 = 0, \\
q_1 &= p_1 - \frac{\langle p_1, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 \\
&= p_1, && q_1(t) = t \\
\langle q_1, q_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \mathrm{d}t + 0 = 2 \\
\langle p_2, q_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} 2t \cdot 0 \mathrm{d}t + 0 \cdot 1 = 0 \\
\langle p_2, q_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} 2t \cdot 1 \mathrm{d}t + 0 \cdot 0 = 0 \\
q_2 &= p_2 - \frac{\langle p_2, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 \\
&= p_2, && q_2(t) = t^2 \\
\langle q_2, q_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} (2t)^2 \mathrm{d}t + 0 = \frac{8}{3} \\
\langle p_3, q_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} 3t^2 \cdot 0 \mathrm{d}t + 0 \cdot 1 = 0 \\
\langle p_3, q_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} 3t^2 \cdot 1 \mathrm{d}t + 0 \cdot 0 = 2 \\
\langle p_3, q_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} 3t^2 \cdot 2t \mathrm{d}t + 0 \cdot 0 = 0 \\
q_3 &= p_3 - \frac{\langle p_3, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 - \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} q_1 \\
&= p_3 - \frac{2}{2} p_1, && q_3(t) = t^3 - t
\end{aligned}
$$

En ortogonalbas är given av $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, där

$$
q_0(t) = 1, \qquad q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = t^2, \qquad q_3(t) = t^3 - t
$$

5. **(10 p)**

(a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen (3 p)

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}
$$

Lösning: det $A - \lambda I = 0$ ger

$$
\lambda^2 - 9 = 0
$$

det vill säga $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. För egenvektorer får vi

$$
(A - 3I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0
$$

med lösning $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(A + 3I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0$$

med lösning $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) Lös begynnelsesvärdesproblemet (3 p)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^\top \end{cases}$$

Lösning: Vi skriver $\mathbf{y}(t)$ i basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bestående av egenvektorer till A.

$$\mathbf{y}(t) = c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2$$

Differentialekvationen blir då

$$\begin{aligned} c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2 &= A\left(c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2\right) \\ &= 3c_1(t)\mathbf{v}_1 - 3c_2(t)\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Då $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en bas, måste vi ha

$$c_1'(t) = 3c_1(t) \qquad c_2'(t) = -3c_2(t)$$

med lösning

$$c_1(t) = e^{3t}c_1(0) \qquad c_2(t) = e^{-3t}c_2(0)$$

För att bestämma konstanterna, löser vi

$$\mathbf{y}(0) = c_1(0)\mathbf{v}_1 + c_2(0)\mathbf{v}_2$$

Här är $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^\top = \mathbf{v}_2$, så $c_1(0) = 0$, $c_2(0) = 1$. Lösningen är då

$$y(t) = e^{-3t}\mathbf{v}_2 = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(c) Lös även det störda begynnelsesvärdesproblemet (2 p)

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -2 \end{bmatrix}^\top \end{cases}$$

Där $\varepsilon \neq 0$. Vad är $\lim_{t\to\infty} \|z(t) - y(t)\|$?

Lösning: Uppgiften löses på samma sätt som i (b), men här får vi för konstanterna ekvationssystemet $c_1(0)\mathbf{v}_1 + c_2(0)\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}(0)$, det vill säga

$$c_1(0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2(0)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -2 \end{bmatrix}$$

Lösningen är $c_1(0) = \frac{2\varepsilon}{3}$, $c_2(0) = 1 + \frac{\varepsilon}{3}$. Vi får

$$z(t) = \frac{2\varepsilon}{3}e^{3t}\mathbf{v}_1 + (1 + \frac{\varepsilon}{3})e^{-3t}\mathbf{v}_2$$

Vi ser at när $t \to \infty$, kommer $y(t)$ att gå mot noll, medan $z(t)$ divergerar i riktningen $\mathbf{v}_1$ $\|z(t) - y(t)\|$ går därför mot oändlig,

$$\lim_{t\to\infty} \|z(t) - y(t)\| = \infty$$

(d) Är begynnelsesvärdesproblemet i (b) stabilt? Varför / varför inte? (2 p) Inte stabilt, då vi i (c) såg att en störning i initialvärdet gjorde att lösningarna divergerade ifrån varandra. (Kan också säga ostabilt fördi att A har ett egenvärde $3 > 0$.)

6. Vi använder centraldifferens för att approximera andraderivata av en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **(8 p)**

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

(a) Visa att om f är C^4 och $|f^{(4)}(y)| \leq M_4$ för alla $y \in [x-1, x+1]$, gäller följande felgräns för trunkeringsfelet R_T (3 p)

$$|R_T| = \left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{M_4 h^2}{12}$$

för $h < 1$.

Lösning: Vi tillämpar Taylors formel med restterm

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi(h))h^4$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi(-h))h^4$$

Sätter vi in i centraldifferensen, får vi

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{1}{24}(f^{(4)}(\xi(h)) + f^{(4)}(\xi(-h)))h^2$$

och därefter

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| = \frac{1}{24}\left| f^{(4)}(\xi(h)) + f^{(4)}(\xi(-h)) \right| h^2 \leq \frac{2}{24} M_4 h^2$$

(b) Antag vi inte beräknar f exakt, men använder en approximation $\hat{f}$ med absolut felgräns

$$|\hat{f}(y) - f(y)| \leq \mu$$

för alla $y \in [x-1, x+1]$. Visa följande felgräns för det medförde felet i centraldifferensen (3 p)

$$|R_f| \leq \frac{4\mu}{h^2}$$

för $h < 1$.

Lösning: Felet som uppstår när vi använder $\hat{f}$ i stället för f i centraldifferensen är

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{\hat{f}(x+h) - 2\hat{f}(x) + \hat{f}(x-h)}{h^2} - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\ &= \frac{\hat{f}(x+h) - f(x+h) - 2(\hat{f}(x) - f(x)) + \hat{f}(x-h) - f(x-h)}{h^2} \end{aligned}$$

Felgränsen följer från $|\hat{f}(x+h) - f(x+h)| \leq \mu$, $|\hat{f}(x) - f(x))| \leq \mu$, $|\hat{f}(x-h) - f(x-h)| \leq \mu$ och trekantolikheten.

(c) Beräkna det h som minimerar summan av de två felgränserna. (2 p)

Lösning: Kan sätta derivatan lika 0 och se att optimal felgräns fås vid

$$h = \sqrt[4]{48 \frac{\mu}{M_4}}$$

7. Vi betraktar en enstegsmetod för lösning av autonoma ordinära differentialekvationer. **(7 p)**

$$z_k = y_k + \frac{h}{3} f(z_k)$$
$$y_{k+1} = y_k - \frac{h}{2} f(y_k) + \frac{3h}{2} f(z_k)$$

(a) Använd metoden på testproblemet

$$\begin{cases} y'(t) &= \lambda y(t), \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

och ta fram metodens stabilitetsfunktion (tillväxtfaktor) $R(h\lambda)$ (2 p)

Lösning: Vi får

$$\begin{aligned} z_k &= y_k + \frac{h}{3}\lambda z_k \\ z_k &= \frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}} y_k \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{h}{2}\lambda y_k + \frac{3h}{2}\lambda z_k \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{h\lambda}{2} y_k + \frac{3h\lambda}{2}\frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}} y_k \\ &= \left(1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{3h\lambda}{2}\frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}}\right) y_k \end{aligned}$$

Stabilitetsfunktionen är alltså

$$R(h\lambda) = \left(1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{3h\lambda}{2}\frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}}\right).$$

(b) Definera en metods stabilitetsområde ut från stabilitetsfunktionen $R(z)$. (1 p)

Lösning:

$$S = \{z \mid |R(z)| \leq 1$$

(c) Visa att metoden tillämpad på testproblemet har lokalt trunkeringsfel på formen (2 p)

$$L_{k+1} = c_1 h^4 y_k + \dots$$

Lösning:

$$L_{k+1} = y_{k+1} - u_k(t_{k+1})$$

Där $u_k(t)$ är lösningen av BVP

$$\begin{cases} u_k'(t) &= \lambda u_k(t), \\ u_k(t_k) &= y_k, \end{cases}$$

BVP kan lösas exakt, och har lösningen

$$u_k(t_k + h) = e^{h\lambda} y_k = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} + \frac{h^4\lambda^4}{24} + \cdots\right)$$

För y_{k+1} har vi från (a):

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \left(1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{3h\lambda}{2}\frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}}\right) y_k \\ &= \left(1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{3h\lambda}{2}\left(1 + \frac{h\lambda}{3} + \frac{h^2\lambda^2}{9} + \frac{h^3\lambda^3}{27} + \cdots\right)\right) y_k \\ &= \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} + \frac{h^4\lambda^4}{18} + \cdots\right) y_k \end{aligned}$$

Från att jämföra de två Taylorutvecklingarna ser vi att första term i differensen L_{k+1} är $(\frac{1}{18} - \frac{1}{24})h^4\lambda^4 y_k$

Vi tillämpar även metoden på den ordinära differentialekvationen

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t)^2 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

(d) Visa, genom att Taylorutveckla $y(t_0+h)$, z_0 och y_1 som funktioner av h, att metoden tillämpad på den här ekvationen har lokalt trunkeringsfel på formen (2 p)

$$L_1 = c_2 h^3 y_0^4 + \ldots$$

Hint: Lös inte ekvationen för z_0, utan ta derivata av ekvationen

$$z_0 = y_1 + \frac{h}{3} z_0^2$$

med avseende på h.

Lösning: Vi börjar med å ta derivata av den exakta lösningen

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t)^2 \\ y''(t) &= 2y(t)y'(t) = 2y(t)^3 \\ y^{(3)}(t) &= 2(y'(t))^2 + 2y(t)y''(t) = 6y(t)^4 \end{aligned}$$

Den exakta lösningen har därför Taylorutveckling om $t = 0$.

$$y(h) = y_0 + hy_0^2 + h^2 y_0^3 + h^3 y_0^4 + \cdots$$

För den numeriska lösningen y_1 får vi, om vi tar derivata av y_1 med avseende på h:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 - \frac{h}{2} y_0^2 + \frac{3h}{2} z_0^2 \\ y_1' &= -\frac{1}{2} y_0^2 + \frac{3}{2} z_0^2 + 3h z_0 z_0' \\ y_1'' &= 6 z_0 z_0' + 3h((z_0')^2 + z_0 z_0'') \\ y_1^{(3)} &= 9(z_0')^2 + 9 z_0 z_0'' + 3h(3 z_0' z_0'' + z_0 z_0^{(3)}) \end{aligned}$$

Ser att för att beräkna $y_1^{(3)}$ i $h = 0$, kommer vi att behöva z_0, z_0 och z_0''. Vi beräknar

$$\begin{aligned} z_0 &= y_0 + \frac{h}{3} z_0^2 \\ z_0' &= \frac{1}{3} z_0^2 + \frac{2h}{3} z_0 z_0' z_0'' \quad = \frac{4}{3} z_0 z_0' + \frac{2h}{3}((z_0')^2 + z_0 z_0'') \end{aligned}$$

Sätter vi inn för $h = 0$ får vi

$$\begin{aligned} z_0(0) &= y_0 \\ z_0'(0) &= \frac{1}{3} y_0^2 \\ z_0''(0) &= \frac{4}{9} y_0^3 \end{aligned}$$

Går vi tillbaka till derivatan av y_1, har vi, i $h = 0$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_0 \\ y_1'(0) &= -\frac{1}{2} y_0^2 + \frac{3}{2} z_0(0)^2 \\ &= -\frac{1}{2} y_0^2 + \frac{3}{2} z_0(0)^2 \qquad = y_0^2 \\ y_1''(0) &= 6 z_0(0) z_0'(0) \\ &= 6 y_0 \cdot \frac{1}{3} y_0^2 \\ &= 2 y_0^3 \\ y_1^{(3)} &= 9(z_0')^2 + 9 z_0 z_0'' \\ &= 9 \left(\frac{1}{3} y_0^2 \right)^2 + 9 y_0 \cdot \frac{4}{9} y_0^3 \\ &= 5 y_0^4 \end{aligned}$$

Därför är Taylorutvecklingen till y_1

$$y_1 = y_0 + hy_0^2 + h^2 y_0^3 + \frac{5h^3}{6} y_0^4 + \cdots$$

och vi ser att trunkeringsfelet är

$$L_1 = y_1 - y(h) = -\frac{1}{6} h^3 y_0^4 + \cdots$$

8. I den här uppgiften studerar vi ett tvådimensionellt optimeringsproblem. **(5 p)**

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})$$

där

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} x_2^2 - x_1 + \frac{1}{4} x_1^2 (x_1 + x_2)^2$$

(a) Beräkna $\nabla f(\mathbf{x})$. (2 p)

Lösning:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 + x_1^3 + \frac{3}{2} x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 \\ \frac{1}{2} x_1^3 + \frac{1}{2} x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

(b) Gör två iterationssteg med steepest descent med startpunkt $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, och exakt lösning av linjesökningsproblemet. (3 p)

Lösning: Vi får att

$$\mathbf{s}_0 = -\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och det första linjesökningsproblemet blir

$$\min_\alpha f(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{s}_0) =$$
$$\min_\alpha f\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$
$$\min_\alpha (-\alpha + \frac{1}{4} \alpha^4)$$

Genom att derivera ser man att lösningen är $\alpha_0 = 1$ och

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha_0 \mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

För nästa steg är

$$\mathbf{s}_1 = -\nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

och linjesökningsproblemet

$$\min_\alpha f(\mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{s}_1) =$$
$$\min_\alpha f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}\right) =$$
$$\min_\alpha \left(\frac{1}{8} \alpha^2 - 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) =$$

Genom att derivera får man att uttrycket är minimerad för $\alpha = \alpha_1 = \frac{2}{3}$, och vi får

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \alpha_1 \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$