N:1 Felanalys och datoraritmetik

Thomas Bäckdahl

8 april 2019

(Baserat på slides av Håkon Hoel)

Översikt

1. Approximationsfel och felfortplantning
2. Konditionstal och stabilitet för matematiska problem
3. Felanalys för approximativa algoritmer
4. Flyttalsaritmetik

Approximationsfel

Av olika skäl behöver vi studera approximationsfel.

- Mätfel och avrundningsfel (datorer representerar nästan alla tal approximativt).
- T.ex. alla tal i intervallet $(1-\epsilon/4, 1+\epsilon/2)$ med $\epsilon = 2.2 \cdot 10^{-16}$ sparas som (64-bit flyttalet) 1 i Matlab.
- **Notation:** För en skalär $x \in \mathbb{R}$ låter vi $\hat{x}$ beteckna en approximation av x. T.ex.:

$$\hat{x} = 3.14 \approx 3.14159265\ldots = x.$$

- Ofta måste man använda en approximativ algoritm/funktion för att lösa ett problem (även i fall där det finns en exakt algoritm).
- Exempel: Exakt funktion $f(x) = e^x$ och en approximation

$$\hat{f}(x) := 1 + x + x^2/2 \approx e^x.$$

Absoluta och relativa felet

- Två sätt att beskriva approximationsfelet:
  - **Absoluta felet:** $\delta x := \hat{x} - x$.
  - **Relativa felet:**
  $$\frac{\delta x}{x} = \frac{\hat{x} - x}{x} = \frac{\textbf{absoluta felet}}{\textbf{exakta värdet}}.$$
- Exempel: Approximationen $\hat{x} = 3.14$ av $x = 3.14159265\ldots$ ger
$$\delta x := -0.00159265\ldots \approx -0.15927 \cdot 10^{-2} \quad \text{och} \quad \frac{\delta x}{x} \approx -0.508 \cdot 10^{-3}. \tag{1}$$
- Om man inte känner exakta värdet av x (och $x, \hat{x} \neq 0$) kan relativa felet approximeras
$$\frac{\delta x}{x} \approx \frac{\delta x}{\hat{x}}.$$

Felgränser och noggrannhet

- Ofta behövs endast uppskattningar av approximationsfelets storlek. Konstanter $c_1, c_2 > 0$ är **felgränser** för respektive fel om

$$|\delta x| \le c_1, \quad \left|\frac{\delta x}{x}\right| \le c_2.$$

- I exemplet ekv. (1) är $c_1 = 0.2 \cdot 10^{-2}$ $c_2 = 0.6 \cdot 10^{-3}$ möjliga felgränser ty

$$|\delta x| \approx 0.15927 \cdot 10^{-2} \le 0.2 \cdot 10^{-2} \quad \text{och} \quad \left|\frac{\delta x}{x}\right| \approx 0.508 \cdot 10^{-3} \le 0.6 \cdot 10^{-3}.$$

- Om det absoluta felet uppfyller $|\delta x| \le 0.5 \cdot 10^{-n}$ säger vi att approximationen $\hat{x}$ har (minst) n **korrekta decimaler** (Obs! n kan vara negativ.)
- (Obs! Inte riktigt samma definition som Numerisk analys boken s. 9)
  Om relativa felet uppfyller $|\delta x|/|x| < 0.5 \cdot 10^{-n}$ säger vi att approximationen $\hat{x}$ har (minst) n **signifikanta siffror**.
- Approximationen $\hat{x} = 3.14$ av π har 2 korrekta decimaler och 2 signifikanta siffror. (3 signifikanta enligt bokens def.)

Felfortplantning

- Antag vi har en funktion/algoritm $f : I \to \mathbb{R}$, med $I \subset \mathbb{R}$ och att vi önskar att beräkna $f(x)$ för indata $x \in I$.
- Felfortplanting studerar hur fel i indata $\hat{x} - x$ fortplantar sig till fel i utdata $\delta f(x) = f(\hat{x}) - f(x)$.
- Om vi antar $f \in C^1(I)$ ger medelvärdessatsen

$$\delta f(x) = f'(x + \theta\delta x)(\hat{x} - x) = f'(x + \theta\delta x)\delta x, \quad \theta \in [0, 1].$$

- Observation: $|utdatafelet| > |indatafelet|$ om $|f'| > 1$, och annars är $|utdatafelet| \leq |indatafelet|$.
- Om inte θ och/eller x är bekanta, används ofta första ordningens approximativa felfortplaningsformel

$$\delta f(x) \approx f'(\hat{x})\delta x \tag{2}$$

med motsvarande absoluta och relativa felgränser

$$|\delta f(x)| \lesssim |f'(\hat{x})||\delta x| \quad \text{och} \quad \left|\frac{\delta f(x)}{f(\hat{x})}\right| \lesssim \left|\frac{f'(\hat{x})}{f(\hat{x})}\right| |\delta x|$$

Exempel 1.2

Vi önskar att bestämma volymen av ett klot med radien r.
Antag att vår mätning av radien $\hat{r}$ är bestämd med 1% relativfel (indatafel).
Ange felgräns för relativfelet till volymbestämmningen.

Lösning:

1. Formeln för volymen: $V(r) = (4/3)\pi r^3$ med $V'(r) = 4\pi r^2$.
2. Relativfelet högst 1% implicerar att $|\delta r| \le 0.01|r| \lesssim 0.01|\hat{r}|$.
   (Vi använder approximativa felgränsen då vi inte känner r).
3. Approximativa felfortplantningsformeln ger

$$\left|\frac{\delta V(r)}{V(\hat{r})}\right| \lesssim \left|\frac{V'(\hat{r})}{V(\hat{r})}\right| |\delta r| \lesssim \left|\frac{4\pi \hat{r}^2}{(4/3)\pi \hat{r}^3}\right| \cdot 0.01 \cdot |\hat{r}| = 0.03.$$

Slutsats: 1% relativfel i indata ger att volymen kan bestämmas med 3% relativfel.

Högre ordnings felapproximation

- Medelvärdessatsen (2) leder till första ordningens approximation av felfortplantningen
$$\delta f(x) \approx f'(\hat{x})\delta x \qquad (3)$$
- Om $f'(\hat{x}) \approx 0$, så är sannolikt approximationen (3) för optimistisk.
- Om t.ex. $f \in C^2(I)$ kan man i stället härleda en andra ordningens utveckling
  1. $$\delta f(x) = f'(x)\delta x + f''(x + \theta\delta x)\delta x^2/2, \quad \theta \in [0, 1],$$
  2. och, om $f'(\hat{x}) \approx 0$, approximativa felfortplantningsformeln
  $$\delta f(x) \approx f''(\hat{x})\delta x^2/2.$$

Exempel 1.4 (ändrat)

Betrakta $f(x) = x^2 + 2x - 1$ och antag vi är givna mätningen $\hat{x} = -1 \approx x$ och $|\hat{x} - x|/|\hat{x}| \leq 0.01$. Hur noggrant kan $f(x)$ bestämmas?

Lösning:

1. Då $f'(x) = 2x + 2$ är $f'(\hat{x}) = 0$, och vi använder approximationen
$$\delta f(x) \approx f''(\hat{x})\delta x^2/2.$$
2. $f(\hat{x}) = -2$ och $f''(\hat{x}) = 2$ ger
$$\left|\frac{\delta f(x)}{f(\hat{x})}\right| \lesssim \left|\frac{f''(\hat{x})}{f(\hat{x})}\right| \delta x^2/2 \leq 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

Slutsats: $f(x)$ kan bestämmas med fyra signifikanta siffror.

Felfortplantning i flera variabler

- Generalisering av begreppen ovan från endimensionella fall till n-dimensionella fall:
- För en approximation $\hat{x} \approx x$ där $\hat{x}, x \in \mathbb{R}^n$, och $\delta x = \hat{x} - x$ säger vi att $c_1, c_2 > 0$ är felgränser för absoluta resp. relativfelen om

$$\|\delta x\| \leq c_1, \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq c_2.$$

- Om $f \in C^1(I)$ där $I \subset \mathbb{R}^n$, dvs $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kan felfortplaningen från fel i indata

$$\hat{x} = x + \delta x = (x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n)$$

till fel i utdata $f(\hat{x}) = f(x) + \delta f(x)$ skattas med medelvärdessatsen

$$\delta f(x) = f(\hat{x}) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s\delta x)\, ds = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + \theta \delta x)\delta x_k, \quad \theta \in [0,1].$$

- Approximation, om x är obekant: $\delta f(x) \approx \nabla f(\hat{x}) \cdot \delta x$.

Felfortplantning i flera variabler forts.

- Cauchy-Schwartz, $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, är nyttig vid skattning av felgräns för felfortplantningen:

$$|\delta f(x)| \lesssim |\nabla f(\hat{x}) \cdot \delta x| \leq \|\nabla f(\hat{x})\|\|\delta x\| \quad \& \quad \left|\frac{\delta f(x)}{f(x)}\right| \lesssim \frac{\|\nabla f(\hat{x})\|\|\delta x\|}{|f(x)|}. \qquad (4)$$

Exempel 1.3: Härled formel för relativa felet för multiplikation $f(x) = x_1 x_2$

Lösning:

$$|f(\hat{x}) - f(x)| = |(x_1 + \delta x_1)(x_2 + \delta x_2) - x_1 x_2| = |x_1 \delta x_2 + x_2 \delta x_1 + \delta x_1 \delta x_2| \lesssim |x_1 \delta x_2 + x_2 \delta x_1|.$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\delta f(x)}{f(x)}\right| \lesssim \left|\frac{x_1 \delta x_2 + x_2 \delta x_1}{x_1 x_2}\right| \leq \left|\frac{\delta x_2}{x_2}\right| + \left|\frac{\delta x_1}{x_1}\right|$$

Då $\nabla f = (x_2, x_1)$ ger (4) en alternativ felgräns

$$\Longrightarrow \left|\frac{\delta f(x)}{f(x)}\right| \lesssim \frac{\|x\|\|\delta x\|}{|x_1 x_2|} = \sqrt{x_1^{-2} + x_2^{-2}}\|\delta x\|.$$

Kondition och konditionstal

- (Relativa) konditionstalet är definierad som

$$\kappa(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \max_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{(|f(x+\delta x) - f(x)|/|f(x)|)}{(\|\delta x\|/\|x\|)} \approx \frac{\|\textbf{Relativfel utdata}\|}{\|\textbf{Relativfel indata}\|}$$

- Tolkning: Ett problem med indata relativfel $\alpha\%$ kan ha utdata relativfel $\kappa \cdot \alpha\%$.
- Ett problem med litet konditionstal, t.ex. $\kappa \in (0, 10)$, sägs vara **stabilt** eller **välkonditionerad**.
- Och omvänd, ett problem med stort konditionstal, t.ex. $\kappa = 10^8$, sägs vara **instabilt** eller **illakonditionerad**.
- Tillämpning av approximationen $|f(x+\delta x) - f(x)| \lesssim \|\nabla f(x)\| \|\delta x\|$ ger följande estimat för κ:

$$\kappa(x) \lesssim \frac{(\|\nabla f(x)\| \|\delta x\|/|f(x)|)}{(\|\delta x\|/\|x\|)} = \|x\| \frac{\|\nabla f(x)\|}{|f(x)|}.$$

Exempel

1. Den endimensionella funktionen $f(x) = cx$ och $x \neq 0$ ger

$$\kappa(x) \lesssim |x| \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = |x| \frac{|c|}{|cx|} = 1.$$

2. Funktionen $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ och $x = (1, 1 + 10^{-100})$ ger

$$\kappa(x) \approx \|x\| \frac{\|\nabla f(x)\|}{|f(x)|} \approx \sqrt{2} \frac{\|(1, -1)\|}{|1 - (1 + 10^{-100})|} \approx 2 \cdot 10^{100}.$$

Observation: Subtraktionen $x_1 - x_2$ är en instabil operation när $x_1 \approx x_2$.

3. Funktionen $f(x) = Ax$ där A är en inverterbar $n \times n$ matris ger

$$\kappa(x) \lesssim \frac{(\|A\| \|\delta x\| / \|Ax\|)}{(\|\delta x\| / \|x\|)} = \|A\| \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

(Vi återkommer till matrisnorm $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ i kapitel 5.)

Approximativa algoritmer, framåt- och bakåtfel

- Förutom indatafel (t.ex. mätfel, eller trunkerad representation) finns en annan potentiell felkälla: exakta metoden/algoritmen f måste i många fall ersättas av en approximativ algoritm $\hat{f}$.
- **Framåtfelet** för en trippel $(f, \hat{f}, x)$ ges av $\hat{f}(x) - f(x)$, som beskriver approximativa algoritmens fel i utdata.
- Antag i fortsättningen att f är inverterbar i en omgivning av x.
- Observera att för varje värde $\hat{f}(x)$ finns då ett indatavärde $\hat{x} = f^{-1}(\hat{f}(x))$ så att

$$f(\hat{x}) = f(f^{-1}(\hat{f}(x))) = \hat{f}(x).$$

- **Bakåtfelet** för en trippel $(f, \hat{f}, x)$ är definierad som

$$\hat{x} - x = f^{-1}(\hat{f}(x)) - x.$$

  Bakåtfelet $\hat{x} - x$ motsvarar det absoluta fel δx som ger felfortplantningen $f(\hat{x}) - f(x) = \hat{f}(x) - f(x)$.

Exempel 1.8

Låt $f(x) = e^x$ och

$$\hat{f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

vara exakta resp. approximativa algoritmen. Beräkna framåt- och bakåtfelet för $(f, \hat{f}, x)$ med $x = 1$.

Lösning:

1. Då

$$\hat{f}(1) = (1 + 1 + 1/2 + 1/6) = 8/3$$

   blir framåtfelet

$$\hat{f}(1) - f(1) = 8/3 - e^1 = -0.051615\ldots$$

2. För bakåtfelet, observera att $f^{-1}(x) = \ln(x)$. Det ger

$$\hat{x} = f^{-1}(\hat{f}(1)) = \ln(8/3)$$

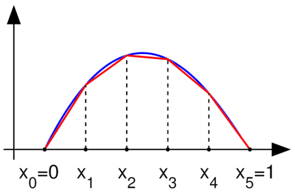
   och

$$\hat{x} - x = \ln(8/3) - 1 = -0.019171\ldots$$

Numerisk algoritm

Exempel, matematisk problem: Beräkna integralen

$$I = \int_0^1 g(x)\, dx.$$



Om vi inte kan lösa problemet exakt, kan vi försöka lösa det numeriskt. Typiska steg från matematiskt problem till numerisk algoritm:

1. Reduktion av informationsmängd: approximera funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ med styckvis-linjär funktion $\bar{g}$ sådan att $\bar{g}(x_i) = g(x_i)$ för $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$.
2. Förenklat (numeriskt) problem: Beräkna integralen
$$\hat{I} = \int_0^1 \bar{g}(x)\, dx.$$
3. Numerisk algoritm
$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{n-1} (g(x_i) + g(x_{i+1})) \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}.$$

Stabilitet för numeriska algoritmer

- Kom ihåg att ett problem sägs vara stabilt/välkonditionerad om konditionstalet är litet
$$\kappa(x) = \frac{\|\textbf{relativfel utdata}\|}{\|\textbf{relativfel indata}\|}.$$
- Med andra ord, ett problem är stabilt om relativt små förändringar i indata ger relativt små förändringar i utdata.
- Definitionen: En numerisk algoritm $\hat{f} \approx f$ sägs vara stabil för $x \neq 0$ om relativa bakåtfelets storlek
$$\frac{|f^{-1}(\hat{f}(x)) - x|}{\|x\|}$$
är litet.
- Med andra ord, $\hat{f}$ är stabil om $\hat{f}(x)$ är exakta lösningen till nästan rätt problem $(f(\hat{x}))$.
- Exempel 1.8: $|f^{-1}(\hat{f}(1)) - 1|/1 \approx 0.02$. Algoritmen är stabil för $x = 1$.

Framåt- och bakåtanalys

- Vi använder bakåtanalys i definitionen av stabilitet bland annat för att det i många fall är lättare att studera än framåtanalys.
- Exempel: Betrakta problemet $Ax = b$, A stor men inverterbar matris, och låt
$$f(b) = A^{-1}b, \quad \text{och} \quad \hat{f}(b) = (A^{-1} + \varepsilon I)b.$$
- Framåtanalys estimerar (framåtstabiliteten)
$$\frac{\|\hat{f}(b) - f(b)\|}{\|f(b)\|},$$
vilket är svårt att komma åt i fall där A är stor och vi inte kan lösa problemet exakt.
- I bakåtanalysen använder vi att $f^{-1}(y) = Ay$, och estimerar enkelt (bakåt) stabiliteten
$$\frac{\|f^{-1}(\hat{f}(b)) - b\|}{\|b\|} = \frac{\|A(A^{-1} + \varepsilon I)b - b\|}{\|b\|} = \frac{\|\varepsilon Ab\|}{\|b\|} \leq |\varepsilon|\|A\|.$$

- I programmeringsspråk kan tal sparas i en del olika format (datatyper):
  - signed int32 eller 64 (32 eller 64-bits heltal), dvs alla heltal i $[-2^{31}, 2^{31}-1]$ resp. $[-2^{63}, 2^{63}-1]$
  - single precission floating point (32-bit flyttal) $\hat{\pi} = 3.14159274101257$
  - double precission floating point (64-bit flyttal) $\hat{\pi} = 3.14159265358979$
  - ...
- I Matlab sparas alla tal som flyttal i datatypen **double 64** per default. Om du önskar att spara i annan datatyp måste du ange det när du tilldelar en variabel ett värde.

```
>> x = pi
x =  3.14159265358979
>> y = int64(pi)
y = 3
```

Flyttal

- Ett flyttalssystem definieras av kvadrupeln $\mathcal{F} = (\beta, t, L, U)$.
  - $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ är basen till systemet. $\beta = 2, 10$ ger det binära respektive decimala systemet.
  - t är antalet siffror i systemet (relaterad till antal signifikanta siffror).
  - L och U är lägsta resp. högsta värde på exponenten (se nedan).
- Varje flyttal x i $\mathcal{F}$ representeras på formen

$$x = \pm(d_0 + d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \ldots + d_{t-1}\beta^{1-t})\beta^e$$

  där $1 \leq d_0 \leq \beta - 1$, $0 \leq d_i \leq \beta - 1$ för alla $1 \leq i \leq t - 1$ och $L \leq e \leq U$.
- Med mantissan $m = d_0.d_1 \ldots d_{t-1}$ kan talet ovan skrivas $x = \pm m \cdot \beta^e$.
- Exempel: Flyttalssystemet $(10, 3, -1, 1)$ består av tal på formen

$$x = \pm d_0.d_1 d_2 \times 10^e, \quad 1 \leq d_0 \leq 9, \quad 0 \leq d_1, d_2 \leq 9, \quad -1 \leq e \leq 1.$$

- T.ex. flyttalet $x = -0.94 = -9.40 \cdot 10^{-1}$ fås med $d_0 = 9, d_1 = 4, d_2 = 0$ och $e = -1$.

- Exempel: Flyttalsstemet (IEEE-754) double beskrivs av kvadrupeln $(\beta = 2, t = 53, L = -1022, U = 1023)$ och består av alla tal

$$x = \pm \underbrace{d_0.d_1 \ldots d_{52}}_{\text{mantissa}} \times 2^e, \text{ där } \quad d_0 = 1 \quad 0 \leq d_i \leq 1, \quad i \geq 1,$$

och $\quad -1022 \leq e \leq 1023.$

- T.ex. talet

$$x = 2.75 = (1 + 0 \cdot 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}) \cdot 2^1 \quad \text{skrivs} \quad 1.0110\ldots0_2 \cdot 2^1.$$

$$\underset{\text{tecken}\uparrow}{0}\,\underbrace{10000000000}_{\substack{\text{exponent+1023}\\ \text{(11bitar)}}}\,\underbrace{0110000000000000000000000000000000000000000000000000}_{\substack{\text{mantissa utan } d_0\\ \text{(52bitar)}}}$$

Underflow, overflow och flyttalsavrundning

- Då vi har normaliseringen $1 \leq d_0 \leq \beta - 1$ för systemet $\mathcal{F} = (\beta, t, L, U)$, får vi

$$\min(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_+) = 1.0\ldots0 \cdot \beta^L = \beta^L =: \text{UFL (underflow level)}$$

  och

$$\max(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_+) = (\beta-1).\underbrace{(\beta-1)\ldots(\beta-1)}_{t-1} \cdot \beta^U = \beta^{U+1}(1-\beta^{-t}) =: \text{OFL},$$

  där OFL står för overflow level.

- För att konvertera/avrunda reella tal till flyttal kan vi tänka oss, något förenklat, att följande avbildning $fl : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$ används:

$$fl(x) = \begin{cases} \arg\min_{y \in \mathcal{F}} |y - x| & \text{om UFL} \leq |x| \leq \text{OFL} \\ \text{Inf} & \text{om } |x| > \text{OFL}. \end{cases}$$

- Tal $|x| < \text{UFL}$ (t.ex. 0) ingår formellt inte i $\mathcal{F}$.
- För tal $|x| < \text{UFL}$ tillåter IEEE-standarden gradvis underspill genom att släppa på normaliseringskravet. Detta ger större relativt fel.
- T.ex. talet 2^{-1023}skrivs $\;0.100\ldots0_2 \cdot 2^{-1022}$ (52 bitar kvar)

$$\underset{\text{tecken}\uparrow}{0}\;\underbrace{00000000000}_{\substack{\text{exponent}+1022\\(11\text{bitar})}}\;\underbrace{1000000000000000000000000000000000000000000000000000}_{\substack{\text{mantissa med } d_0\\(52\text{bitar})}}$$

- Minsta positiva talet $2^{-1022}2^{-52} = 2^{-1074}$ (1 bit kvar)

$$\underset{\text{tecken}\uparrow}{0}\;\underbrace{00000000000}_{\substack{\text{exponent}+1022\\(11\text{bitar})}}\;\underbrace{0000000000000000000000000000000000000000000000000001}_{\substack{\text{mantissa med } d_0\\(52\text{bitar})}}$$

Maskinprecision och flyttalsaritmetik

- Följande egenskap gäller för alla UFL $\le |x| \le$ OFL, (övning 1.5)

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \le 0.5 \cdot \beta^{1-t}.$$

- Dvs $fl(x)$ approximerar x med $t-1$ signifikanta siffror (i basen β) och talet $\mu = 0.5 \cdot \beta^{1-t}$ kallas **maskintalet** eller **avrundningsenheten**.
- Alternativt skriver man

$$fl(x) = x(1+\delta), \quad \text{för något} \quad |\delta| \le \mu.$$

- Flyttalssystem är implementerad så att flyttalsaritmetik göras i ett utvidgat register och

$$fl(x \diamondsuit y) \le x \diamondsuit y(1+\delta) \quad \text{för något } |\delta| \le \mu,$$

om $\diamondsuit = +, *, -$ eller $/$, $x, y \in \mathcal{F}$ (och $x \diamondsuit y \neq Inf$).

Illustration av flyttalsaddition i systemet $\mathcal{F} = (10, 4, -9, 9)$.
Summan av $x = 1.234 \cdot 10^0$ och $y = 4.567 \cdot 10^{-2}$.

1. Bestäm vilken av x och y som har störst exponent. Representera båda talen med mantissor anpassad största exponenten:

$$x = 1.234 \cdot 10^0 \quad \& \quad y = 0.04567 \cdot 10^0.$$

2. Addera talen:

$$x + y = 1.27967 \cdot 10^0$$

3. Avrunda till närmaste flyttal:

$$fl(x + y) = fl(1.27967 \cdot 10^0) = 1.280 \cdot 10^0.$$

- **Exempel 1.12** Låt $\mathcal{F} = (10, 4, -9, 9)$ och addera flyttalen

$$a = 9.876 \cdot 10^4, \quad b = -9.880 \cdot 10^4, \quad c = 3.456 \cdot 10^1.$$

- Å ena sidan får man

$$fl(fl(a+b)+c) = fl(-4.000 \cdot 10^1 + 3.456 \cdot 10^1) = -5.440 \cdot 10^0,$$

men å andra sidan

$$\begin{aligned} fl(a + fl(b+c)) &= fl(a + fl((-9.880 + 0.003456) \cdot 10^4)) \\ &= fl((9.876 - 9.877) \cdot 10^4) \\ &= -1.000 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

- Slutsats: Generellt har vi **inte**

$$fl(fl(a+b)+c) = fl(a + fl(b+c)).$$

Utskiftning

- **Utskifning** innebär att noggrannhet går förlorad när flyttal med olika storleksordningar adderas/subtraheras.
- Exempel **fullständig utskiftning**: Addition av flyttalen $a = 1.234 \cdot 10^7$ och $b = 1.678 \cdot 10^3$ i $\mathcal{F} = (10, 4, -9, 9)$ ger

$$\begin{aligned} fl(a+b) &= fl((1.234 + 0.0001678) \cdot 10^7) \\ &= fl((1.2341678) \cdot 10^7) \\ &= 1.234 \cdot 10^7 \\ &= a. \end{aligned}$$

- **Partiell utskiftning:** Om en följd av flyttal $x_1, x_2, \ldots$ av olika storleksordning adderas.
- Strategi för att undvika utskiftning: Summera följden i (till beloppet) växande storleksordning.

Utskiftning i Matlab

```
>> eps
ans =    2.220446049250313e-16

>> 2^(1-53)
ans =    2.220446049250313e-16
%Slutsats: Matlabs variabel eps=2^(-52) = 2*mu

>> x=x+eps
x =  1.000000000000000 %  = 1+eps

>> x=1+2*eps/3
x =  1.000000000000000 % = 1+ eps

>> x=1+eps/3
x =  1
```

- **Kancellation** innebär noggrannhetsförlusten som uppstår vid subtraktion av två nästan lika stora tal (efter tidigare operationer med avrundningsfel).
- **Exempel 1.15** Betrakta följande beräkning

$$37654 + 25.874 - 37679 = 0.874$$

i flyttalssystemet $\mathcal{F} = (10, 5, -9, 9)$.
- Dvs

$$
\begin{aligned}
& fl(fl(3.7654 \cdot 10^4 + 2.5874 \cdot 10^1) - 3.7679 \cdot 10^4) \\
&= fl(fl((3.7654 + 0.0025874) \cdot 10^4) - 3.7679 \cdot 10^4) \\
&= fl(fl(3.7679874 \cdot 10^4) - 3.7679 \cdot 10^4) \\
&= fl(3.7680 \cdot 10^4 - 3.7679 \cdot 10^4) \\
&= 1.0000 \cdot 10^0
\end{aligned}
$$

- Kancellation kan ibland undvikas genom att göra en matematisk omskrivning av problemet.
- **Exempel** För stora x får man kancellation vid beräkning av $\sqrt{x^2+1}-x$. Gör istället omskrivningen

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

vid beräkning av $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ undviks kancellation.

Framåtanalys av flyttalsalgoritm

- **Exempel 1.17:** Kvadrering: $f(x) = x^2$ för $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ approximeras i flyttalssystem av $\hat{f}(x) = fl(fl(x)^2)$. Låt oss verifiera att

$$\left| \frac{\hat{f}(x) - f(x)}{f(x)} \right| = \mathcal{O}(\mu)$$

  vid framåtanalys:

1. Då $fl(x) = x(1+\delta)$ för något $\delta \in [-\mu, \mu]$ där μ är maskintalet, följer det att

$$\hat{f}(x) = x^2(1+\delta_1)^2(1+\delta_2), \quad \text{för några} \quad \delta_1, \delta_2 \in [-\mu, \mu].$$

2. Det ger relativa felgränsen

$$\left| \frac{\hat{f}(x) - f(x)}{f(x)} \right| = \left|(1+\delta_1)^2(1+\delta_2) - 1\right| = O(\mu).$$

Bakåtanalys

Repetition: Den approximativa algoritmen $\hat{f} \approx f$ är stabil för $x \neq 0$ om relativa bakåtfelet är litet.

För flyttalsalgoritmer kopplar vi "litet" till flyttalssystemets maskintal $\mu = 0.5 \cdot \beta^{1-t}$. Dvs flyttalsalgoritmen är stabil om

$$\left| \frac{f^{-1}(\hat{f}(x)) - x}{x} \right| = \mathcal{O}(\mu).$$

Exempel 1.17: Låt oss verifiera att $\hat{f} = fl(fl(x)^2) \approx x^2 = f(x)$ är stabil.

1. Vi har
$$\hat{f}(x) = x^2(1+\delta_1)^2(1+\delta_2), \quad \text{för några} \quad \delta_1, \delta_2 \in [-\mu, \mu].$$

2. Inversen $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ och $\sqrt{1+\delta} = 1 + \delta/2 + \mathcal{O}(\delta^2)$ ger
$$f^{-1}(\hat{f}(x)) = x\left((1+\delta_1)\sqrt{(1+\delta_2)}\right) = x\left(1 + \delta_1 + \delta_2/2 + \mathcal{O}(\delta_1^2 + \delta_2^2)\right),$$

3. Flyttalskvadrering är stabil:
$$\left|\frac{f^{-1}(\hat{f}(x)) - x}{x}\right| \lesssim \left|\frac{x(\delta_1 + \delta_2/2)}{x}\right| = O(\mu).$$