Lösningar till tentamen i Tillämpad matematik K, 1994–05–30

1.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^3 e^{-4/y}, & f(1,4) &= e^{-1} \\
f'_x(x,y) &= 3x^2 e^{-4/y}, & f'_x(1,4) &= 3e^{-1} \\
f'_y(x,y) &= x^3 \frac{4}{y^2} e^{-4/y}, & f'_y(1,4) &= \frac{1}{4} e^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
f(x,y) = e^{-1}\big(1 + 3(x-1) + \frac{1}{4}(y-4)\big) + R(x,y)
$$

2.

$$
T = 4,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}
$$

$$
b_n = 0 \quad \text{ty } f \text{ är jämn}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt \\
&= \left[\frac{\sin\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^1 dt = 1
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{2}{5\pi}\cos\frac{5\pi t}{2} - \cdots
\end{aligned}
$$

3.

$$
\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0
$$

$$
\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}
$$

$$
\lambda_1 = 1,\ g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2,\ g_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

$$
x(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ger } c_1 = 4,\ c_2 = -1
$$

$$
x(t) = 4e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

Systemet är instabilt ty λ_1 och λ_2 är > 0.

4.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F} = (x^3 - x^2 y, y^3 - xy^2, 4xyz) \\
&\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2xy + 4xy = 3(x^2 + y^2) \\
&\text{Gauss divergenssats ger } \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \\
&= 3 \iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \left\{ \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right\} \\
&= 3 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2\theta (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\
&= 3 \int_0^1 r^4\, dr \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\phi = \frac{8\pi}{5}
\end{aligned}
$$

5. De stationära punkterna till funktionen $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ges av ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 4x^3 - 4y = 0 \\
f'_y(x,y) &= 4y^3 - 4x = 0
\end{aligned}
$$

Den första ekvationen ger $y = x^3$ vilket insättes i den andra ekvationen: $x^9 - x = 0$ vilken har tre lösningar $x = 0$ och $x = \pm 1$. Vi har alltså tre stationära punkter $(0,0)$ och $\pm(1,1)$. Hessematrisen är

$$
f''(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}.
$$

$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdena ± 4 så att matrisen är indefinit.

$f''(\pm 1, \pm 1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ har egenvärdena 8, 16 så att matrisen är positivt definit.

Vi drar slutsatsen att $(0,0)$ är en sadelpunkt och att $\pm(1,1)$ är minimipunkter.

6. Ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ i (DE) och (RV) leder till

(1) $\quad X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < 1;\ X(0) = X(1) = 0$

(2) $\quad T'(t) = \lambda T(t), \quad t > 0$

Egenvärdesproblemet (1) har lösningen

$$
\lambda_n = -(n\pi)^2,\ X_n(x) = \sin n\pi x,\ n = 1, 2, \ldots
$$

och ekvation (2) blir då $T'_n(t) = -(n\pi)^2 T_n(t)$ med lösningen $T_n(t) = C_n e^{-(n\pi)^2 t}$. Serien

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x
$$

löser alltså (DE) och (RV). (BV) ger

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x$$

Multiplikation med $\sin k\pi x$ och integration ger

$$\int_0^1 \sin k\pi x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x \, dx = \frac{1}{2} C_k$$

där vi använt ortogonalitetsrelationerna

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x \, dx = \frac{1}{2}\delta_{nk}$$

Vi har alltså

$$C_n = 2\int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \left[-2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = 2\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

så att lösningen blir

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

7. Om $p, q \in V$ så är grad $(ap(x) + bq(x)) \leq 3$ och $ap(0) + bq(0) = ap(1) + bq(1) = 0$, så att $ap + bq \in V$. Alltså är V ett linjärt rum. Om $p \in V$ så gäller $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Randvillkoren $p(0) = p(1) = 0$ ger $D = 0$, $C = -A - B$, dvs $p(x) = A(x^3 - x) + B(x^2 - x)$. Polynomen $x^3 - x$ och $x^2 - x$ är linjärt oberoende, ty $A(x^3 - x) + B(x^2 - x) \equiv 0$ medför $A = B = 0$ (tag t ex $x = -1$ och x=2). Alltså är dessa polynom en bas för V och därmed dim $V = 2$.

8. TLA sid. 7:16.

9. Skriv en funktionsfil kallad `funk.m` med innehållet

```
function y=funk(x); y=x(1)^4+x(2)^4-4*x(1)*x(2);
```

Använd sedan kommandot

```
>> v=[2;3]; x=fmins('funk',v)
```

med några olika vektorer `v`.