Tentamen i Tillämpad matematik K, 1994–09–08

Telefon: Mats Larsson, 772 35 17
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

1. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för funktionen $f(x,y) = e^{x/y}$ med avseende på punkten $(1,1)$. (6 p)

2. Ange vilken typ av kurva som bestäms av ekvationen

$$4x^2 + 3y^2 - 4xy = 1.$$

Skissa kurvan i xy-planet. (6 p)

3. Bestäm lokala maxima och minima till funktionen $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$. (6 p)

4. (a) Beräkna divergensen av vektorfältet (3 p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + x^2y^3, y - xy^4, z + 2xy^3z).$$

(b) Beräkna normalytintegralen $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ då

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

och $\mathbf{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalen. (3 p)

5. Lös begynnelse-randvärdesproblemet (6 p)

$$\begin{aligned} &u''_t = u''_{xx}, && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, && t > 0, \\ &u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = 1, && 0 < x < 1. \end{aligned}$$

6. Från ett cartesiskt högersystem x, y, z kommer man till ett nytt cartesiskt högersystem ξ, η, ζ på följande sätt: Det nya origot placeras i punkten $(1;2;3)$, ξ-axeln sammanfaller med linjen $x - 1 = 2y - 4 = 3 - z$ och η-axeln är vinkelrät mot e_ξ och mot vektorn $(0,1,2)$. Vidare bildar basvektorerna e_ξ och e_η spetsiga vinklar med e_x. Beräkna $\xi\eta\zeta$-koordinaterna för det gamla origot. (6 p)

7. Sätt

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Låt U och V vara mängderna av alla linjärkombinationer av vektorerna a, b, c, respektive a, b, c, d. Är $U = V$? (6 p)

8. Visa att egenvektorer som svarar mot olika egenvärden till en symmetrisk matris är ortogonala. (6 p)

9. Skriv MATLAB-kommandon som utför de beräkningar som fordras i uppgift 2. (2 p)