Lösningar till tentamen i Tillämpad matematik K, 1994–09–08

1.

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = e^{x/y}, && f(1,1) = e\\
&f'_x(x,y) = \frac{1}{y}e^{x/y}, && f'_x(1,1) = e\\
&f'_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}e^{x/y}, && f'_y(1,1) = -e\\
&f''_{xx}(x,y) = \frac{1}{y^2}e^{x/y}, && f''_{xx}(1,1) = e\\
&f''_{xy}(x,y) = -\Big(\frac{x}{y^3}+\frac{1}{y^2}\Big)e^{x/y}, && f''_{xy}(1,1) = -2e\\
&f''_{yy}(x,y) = \Big(2\frac{x}{y^3}+\frac{x^2}{y^4}\Big)e^{x/y}, && f''_{yy}(1,1) = 3e
\end{aligned}$$

$$P(x,y) = e\Big(1+(x-1)-(y-1)+\frac{1}{2}((x-1)^2-4(x-1)(y-1)+3(y-1)^2)\Big)$$

2. Den kvadratiska formen skrivs på matrisform:

$$4x^2+3y^2-4xy = [\,x \quad y\,]\begin{bmatrix} 4 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix},$$

där matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = (7+\sqrt{17})/2$, $\lambda_2 = (7-\sqrt{17})/2$. Efter byte av koordinater blir ekvationen $\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2 = 1$. Eftersom båda egenvärdena är positiva är detta en ellips. ξ och η axlarna är riktade längs egenvektorerna $g_1 = \begin{bmatrix} 4\\ 1-\sqrt{17}\end{bmatrix}$ och $g_2 = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{17}\\ 4\end{bmatrix}$ (ej normerade). För att skissa kurvan gör vi den grova approximationen $\sqrt{17}\approx 4$. Då blir $g_1 \approx \begin{bmatrix} 4\\ -3\end{bmatrix}$ och $g_2 \approx \begin{bmatrix} 3\\ 4\end{bmatrix}$.

3. De stationära punkterna till funktionen $f(x,y) = x^3+y^2-xy$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2-y = 0\\ f'_y(x,y) &= 2y-x = 0\end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $x = 2y$ vilket insättes i den första ekvationen: $12y^2-y = 0$, vilken har två lösningar $y = 0$ och $y = 1/12$. Vi har alltså två stationära punkter nämligen $(0,0)$ och $(1/6, 1/12)$. Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$. I de två punkterna får vi $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ med egenvärdena $1\pm\sqrt{2}$, så att matrisen är indefinit, och $f''(1/6, 1/12) = \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ med egenvärdena $(3\pm\sqrt{5})/2$, så att matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(0,0)$ är en sadelpunkt och att $(1/6, 1/12)$ är en minimipunkt.

4.

$$\mathbf{F} = (x + x^2y^3, y - xy^4, z + 2xy^3z)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2xy^3 + 1 - 4xy^3 + 1 + 2xy^3 = 3$$

Gauss divergenssats ger

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_V 3\,dx\,dy\,dz = 3 \text{ ggr volymen av V} = 4\pi.$$

5. Ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ i (DE) och (RV) leder till

(1) $$X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < 1;\ X(0) = X(1) = 0$$

(2) $$T''(t) = \lambda T(t), \quad t > 0$$

Egenvärdesproblemet (1) har lösningen

$$\lambda_n = -(n\pi)^2,\ X_n(x) = \sin n\pi x,\ n = 1, 2, \ldots$$

och ekvation (2) blir då $T_n''(t) = -(n\pi)^2 T_n(t)$ med allmänna lösningen $T_n(t) = A_n \sin n\pi t + B_n \cos n\pi t$. Serien

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \sin n\pi t + B_n \cos n\pi t\Big) \sin n\pi x$$

löser alltså (DE) och (RV). Det första (BV) ger $B_n = 0$ och det andra ger sedan

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi A_n \sin n\pi x$$

Multiplikation med $\sin k\pi x$ och integration ger

$$\int_0^1 \sin k\pi x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi A_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x\,dx = \frac{1}{2} k\pi A_k$$

där vi använt ortogonalitetsrelationerna $\int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x\,dx = \frac{1}{2}\delta_{nk}$. Vi har alltså

$$A_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \left[-2\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = 2\frac{1-\cos n\pi}{(n\pi)^2} = 2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

så att lösningen blir

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \sin n\pi t \sin n\pi x.$$

6. Vektorn e_ξ ska vara parallell med $\pm(1, 1/2, -1)$. Villkoret att den bildar spetsig vinkel med e_x, dvs $e_\xi \cdot e_x > 0$, gör att vi väljer plustecknet. Efter normalisering fås $e_\xi = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$. Vektorn e_η ska vara parallell med vektorn

$$\pm\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \pm(-4, 4, -2).$$

Villkoret $e_\eta \cdot e_x > 0$ gör att vi tar minustecknet och efter normalisering har vi $e_\eta = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Slutligen har vi

$$e_\zeta = e_\xi \times e_\eta = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-1,-2,-2)$$

Transformationsmatrisen är $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. För punkter gäller koordinatsambandet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

där den sista termen är de gamla koordinaterna för nya origo. De nya koordinaterna för gamla origo blir vi alltså

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = -P^t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 11/3 \end{bmatrix}$$

7. Vi undersöker om d är en linjärkombination av a, b, c, dvs om det finns skalärer α, β, γ så att $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$, dvs om ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har någon lösning. Efter reducering till trappstegsform ser vi att det inte finns någon lösning. Vektorn d tillhör alltså inte U och vi drar slutsatsen att U och V är olika rum.

8. TLA sid. 7:16.

9. Kommandot `>> [v,d]=eig([4 -2;-2 3])` ger egenvektorer och egenvärden till matrisen.