Lösningar till tentamen i TMA680 Tillämpad matematik K, 1996–05–24

---

1. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_1 + 8$ ges av ekvationssystemet

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_2 + 7 = 0,$$
$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 - 4x_1 = 0.$$

Den andra ekvationen ger $2x_1 = x_2$. Den första ekvationen ger sedan $x_1^2 - 8x_1 + 7 = 0$ med lösningarna $x_1 = 1$ och $x_1 = 7$, vilka ger $x_2 = 2$ respektive $x_2 = 14$. Vi har alltså två extrempunkter nämligen $(1, 2)$ och $(7, 14)$. Hessematrisen är

$$f''(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

I punkten $(1, 2)$ får vi

$$f''(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = 6 > 0$, dvs matrisen är indefinit. Vi drar slutsatsen att $(1, 2)$ är en sadelpunkt. I punkten $(7, 14)$ får vi

$$f''(7, 14) = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_{1,2} = 8 \pm \sqrt{52} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(7, 14)$ är en minimipunkt.

2. De stationära lösningarna ges av ekvationssystemet

$$-\bar{X}_1 - 5\bar{X}_1 e^{\bar{X}_2} = 0,$$
$$\alpha\bar{X}_2 + 10\bar{X}_1 e^{\bar{X}_2} + \beta = 0,$$

med en enda lösning $\bar{X}_1 = 0$, $\bar{X}_2 = -\beta/\alpha$ (om $\alpha \neq 0$). Linjarisering kring denna punkt leder till det linjära systemet $x'(t) = Ax(t)$ med Jacobimatrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 - 5e^{\bar{X}_2} & -5\bar{X}_1 e^{\bar{X}_2} \\ 10e^{\bar{X}_2} & \alpha + 10\bar{X}_1 e^{\bar{X}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 5e^{-\beta/\alpha} & 0 \\ 10e^{-\beta/\alpha} & \alpha \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = -1 - 5e^{-\beta/\alpha} < 0$ och $\lambda_2 = \alpha$ (obs att matrisen är triangulär, så att egenvärdena kan läsas av på diagonalen). Den stationära punkten är stabil om $\alpha < 0$ och instabil om $\alpha > 0$. Konstanten β påverkar inte stabiliteten.

3. Vi löser först egenvärdesproblemet. Egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ med normerade egenvektorer

$$g_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ansatsen $x(t) = y_1(t)g_1 + y_2(t)g_2$ ger $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ med lösningarna $y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$, dvs

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 = c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna c_i bestäms med hjälp av begynnelsevillkoret

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x(0) = c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Detta ekvationssystem ger $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Man kan också använda ortogonalitet:

$$c_1 = g_1^t x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = g_2^t x(0) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resultatet blir

$$x(t) = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} e^{4t} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Systemet är instabilt eftersom ett egenvärde är positivt.

4.

$$T = 4,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = 0 \quad \text{ty } f \text{ är udda}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt = \int_0^2 f(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \int_0^1 \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{-\cos\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 1,3,5,\ldots, \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2,6,10,\ldots, \\ 0, & n = 4,8,12,\ldots, \end{cases}$$

eller

$$b_n = \frac{4}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \sin n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\sin\frac{n\pi t}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi t + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2} + 0$$

$$+ \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi t}{2} + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{7\pi}\sin\frac{7\pi t}{2} + 0 + \frac{2}{9\pi}\sin\frac{9\pi t}{2} + \cdots$$

Amplitudspektrum:

Parsevals formel

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2\,dt = \tfrac{1}{4}a_0^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big)$$

blir

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big)^2$$

$$= \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} + 0 + \frac{2}{25\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} + \frac{2}{49\pi^2} + 0 + \frac{2}{81\pi^2} + \cdots$$

Energispektrum ser likadant ut som amplitudspektrum.

5. (a) Allmänna lösningen blir

$$c(x) = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x)$$

med derivatan

$$c'(x) = A\phi\sinh(\phi x) + B\phi\cosh(\phi x).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} &0 = c'(0) = B\phi, \quad \text{så att } B = 0, \\ &0 = c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = A\phi\sinh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi) - 1\big) \end{aligned}$$

så att

$$A = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}$$

och

$$c(x) = \frac{\nu\cosh(\phi x)}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^1 c(x)\,dx = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} \int_0^1 \cosh(\phi x)\,dx \\ &= \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} \frac{\sinh(\phi)}{\phi} = \frac{\tanh(\phi)}{\phi} \frac{\nu}{\phi\tanh(\phi) + \nu}. \end{aligned}$$

(c) Differentialekvationen är matematisk modell för reaktion och diffusion i en porös katalysatorpellet vid isoterma och stationära förhållanden och "platt" geometri. Ekvationen är skriven på dimensionslös form. Det första randvillkoret betyder att lösningen är en jämn funktion. Det andra randvillkoret beskriver flödet genom randen. ν är en dimensionslös genomgångskoefficient. η är effektivitetsfaktorn.

(d) Konstanten ν kan inte vara negativ, det skulle innebära att diffusionen går från låg till hög koncentration. Värdet $\nu = 0$ svarar mot att ytan är ogenomtränglig, vilket är orimligt. Värdena $0 < \nu < \infty$ är realistiska. Värdet $\nu = \infty$ är ett idealt extremfall, som betyder att det inte finns något flödesmotstånd genom ytan; randvillkoret blir då $c(1) = 1$.

(e) $\eta = 0$ då $\nu = 0$. Derivering med avseende på ν ger

$$\frac{\partial\eta}{\partial\nu} = \frac{\tanh^2(\phi)}{(\phi\tanh(\phi) + \nu)^2} > 0,$$

så att η ökar då ν ökar. Det är rimligt att effektivitetsfaktorn ökar då ytan görs mer genomtränglig.

/SL