Lösningar till tentamen i **TMA680 Tillämpad matematik K, 1997–01–17**

---

1. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x_1,x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_1 + 8$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1,x_2) &= x_1^2 - 4x_2 + 7 = 0, \\ f'_{x_2}(x_1,x_2) &= 2x_2 - 4x_1 = 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $2x_1 = x_2$. Den första ekvationen ger sedan $x_1^2 - 8x_1 + 7 = 0$ med lösningarna $x_1 = 1$ och $x_1 = 7$, vilka ger $x_2 = 2$ respektive $x_2 = 14$. Vi har alltså två extrempunkter nämligen $(1,2)$ och $(7,14)$. Hessematrisen är

$$f''(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

I punkten $(1,2)$ får vi

$$f''(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = 6 > 0$, dvs matrisen är indefinit. Vi drar slutsatsen att $(1,2)$ är en sadelpunkt. I punkten $(7,14)$ får vi

$$f''(7,14) = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_{1,2} = 8 \pm \sqrt{52} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(7,14)$ är en minimipunkt.

2.

$$\begin{aligned}
&T = 4,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \\
&b_n = 0 \quad \text{ty } f \text{ är jämn} \\
&a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \int_0^2 f(t)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = \int_0^2 t\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt \\
&\quad = \left[\frac{t\sin\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 \\
&\quad = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{8}{n^2\pi^2}, & n = 1,3,5,\dots, \\ 0, & n = 2,4,6,\dots, \end{cases} \\
&a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^2 t\,dt = 2 \\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\sin n\Omega t + b_n\sin n\Omega t\Big) \\
&\quad = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2} \\
&\quad = 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{8}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi t}{2} - \frac{8}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi t}{2} - \frac{8}{49\pi^2}\cos\frac{7\pi t}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

3. Vi löser först egenvärdesproblemet. Egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$ med normerade egenvektorer

$$g_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ansatsen $x(t) = y_1(t)g_1 + y_2(t)g_2 + y_3(t)g_3$ ger $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ med lösningarna $y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$, dvs

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} g_3 = c_1 \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna c_i bestäms med hjälp av begynnelsevillkoret

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x(0) = c_1 \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Detta ekvationssystem ger $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = -\frac{2}{3}$, $c_3 = \frac{1}{3}$. Man kan också använda ortogonalitet:

$$c_1 = g_1^t x(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3},$$

$$c_2 = g_2^t x(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{2}{3},$$

$$c_3 = g_3^t x(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Resultatet blir

$$x(t) = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{3t}\frac{2}{9}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Systemet är instabilt eftersom ett egenvärde är positivt.

4. De stationära lösningarna ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_2(1 - x_1^2) &= 0 \\ 2 - x_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

med två lösningar $(x_1, x_2) = (1, 2)$ och $(x_1, x_2) = (-1, -2)$. Jacobimatrisen är

$$\begin{bmatrix} -2x_1 x_2 & 1 - x_1^2 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}.$$

Linjarisering kring $(x_1, x_2) = (1, 2)$ leder till det linjära systemet

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

vars matris har negativa egenvärden -4 och -1, och alltså är stabilt. Linjarisering kring $(x_1, x_2) = (-1, -2)$ leder till systemet

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena är -4 och 1 och systemet är instabilt.

5. (a) Differentialekvationen är $c'' - \phi^2 = 0$, karakteristiska ekvationen är $r^2 - \phi^2 = 0$ med rötterna $r = \pm\phi$. Allmänna lösningen blir

$$c(x) = C_1 e^{\phi x} + C_2 e^{-\phi x} = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x), \quad A = (C_1 + C_2)/2,\ B = (C_1 - C_2)/2,$$

med derivatan

$$c'(x) = A\phi\sinh(\phi x) + B\phi\cosh(\phi x).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} &0 = c'(0) = B\phi, \quad \text{så att } B = 0, \\ &0 = c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = A\phi\sinh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi) - 1\big) \end{aligned}$$

så att

$$A = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}$$

och

$$c(x) = \frac{\nu\cosh(\phi x)}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^1 c(x)\,dx = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} \int_0^1 \cosh(\phi x)\,dx \\ &= \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} \frac{\sinh(\phi)}{\phi} = \frac{\tanh(\phi)}{\phi} \frac{\nu}{\phi\tanh(\phi) + \nu}. \end{aligned}$$

(c) Differentialekvationen är matematisk modell för reaktion och diffusion i en porös katalysatorpellet vid isoterma och stationära förhållanden och "platt" geometri. Ekvationen är skriven på dimensionslös form. Det första randvillkoret betyder att lösningen är en jämn funktion. Det andra randvillkoret beskriver flödet genom randen. ν är en dimensionslös genomgångskoefficient. η är effektivitetsfaktorn.

(d) Konstanten ν kan inte vara negativ, det skulle innebära att diffusionen går från låg till hög koncentration. Värdet $\nu = 0$ svarar mot att ytan är ogenomtränglig, vilket är orimligt. Värdena $0 < \nu < \infty$ är realistiska. Värdet $\nu = \infty$ är ett idealt extremfall, som betyder att det inte finns något flödesmotstånd genom ytan; randvillkoret blir då $c(1) = 1$.

/stig