Matematik Chalmers

Tentamen i
TMA680 och TMA681 Tillämpad matematik K, 1998–01–16

Telefon: Fredrik Ekstedt, 772 53 08
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.
Betygsgränser: 3 (25–33), 4 (34–41), 5 (42–) inklusive eventuell bonuspoäng.
Teknologer som läser årets kurs TMA681 gör uppgifterna 1–5, de som läser gamla kursen TMA680 gör uppgifterna 1–4 och 5*.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Diagonalisera A. (6 p)

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet (där b är godtycklig) (6 p)

$$x'(t) = Ax(t); \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

2. (a) Beräkna divergensen av vektorfältet (3 p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + x^2y^3, y - xy^4, z + 2xy^3z).$$

(b) Beräkna normalytintegralen $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ då

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

och $\mathbf{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalen. (3 p)

3. Bestäm lokala maxima och minima till funktionen $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$. (6 p)

4. Bestäm den positiva stationära lösningen till systemet

$$\begin{aligned} X_1' &= 1 - X_1 - X_1X_2, \\ X_2' &= 1 - X_2 - X_1X_2. \end{aligned}$$

Linjärisera kring den stationära lösningen och undersök det linjäriserade systemets stabilitet. (6 p)

5. (a) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -x^{-2}(x^2c'(x))' &= -\phi^2 c(x), \quad 0 < x < 1, \\ c'(0) = 0,\ c'(1) &+ \nu\big(c(1) - 1\big) = 0, \end{aligned}$$

där ϕ, ν är konstanter. Tips: inför en ny variabel $v(x) = xc(x)$. (4 p)

(b) Beräkna kvantiteten $\eta = 3\int_0^1 c(x)x^2\, dx$. (2 p)

(c) Ange en kemiteknisk tolkning av differentialekvationen, randvillkoren och kvantiteten η. (2 p)

5*. Lös begynnelse-randvärdesproblemet (12 p)

$$\begin{aligned} &u_t' = 4u_{xx}'', && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, && t > 0, \\ &u(x,0) = 1, && 0 < x < 1, \end{aligned}$$

med Fouriers metod.

`/stig`