TMA680–681 Tillämpad matematik K, 1998–01–16. Lösningar.

---

1. (a) Egenvärdena är $\lambda_1 = -2+3i$, $\lambda_2 = -2-3i$, egenvektorerna $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+3i \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2-3i \end{bmatrix}$. Vi får $D = P^{-1}AP$, där $D = \begin{bmatrix} -2+3i & 0 \\ 0 & -2-3i \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+3i & -2-3i \end{bmatrix}$.

(b) Lösningen blir

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 \\ &= c_1 e^{(-2+3i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2+3i \end{bmatrix} + c_2 e^{(-2-3i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2-3i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger $c_1 = -c_2$, $c_1 = b/6i$, så att

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b}{6i} \left(e^{(-2+3i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2+3i \end{bmatrix} - e^{(-2-3i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2-3i \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{b}{6i} e^{-2t} \left((\cos 3t + i \sin 3t) \begin{bmatrix} 1 \\ -2+3i \end{bmatrix} - (\cos 3t - i \sin 3t) \begin{bmatrix} 1 \\ -2-3i \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{b}{6} e^{-2t} \begin{bmatrix} 2\sin 3t \\ -4\sin 3t + 6\cos 3t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{F} = (x + x^2y^3, y - xy^4, z + 2xy^3z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2xy^3 + 1 - 4xy^3 + 1 + 2xy^3 = 3$$

Gauss divergenssats ger

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_V 3\, dx\, dy\, dz = 3 \text{ ggr volymen av V} = 4\pi.$$

---

3. De lokala extrempunkterna till funktionen $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 - y = 0 \\ f'_y(x,y) &= 2y - x = 0 \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $x = 2y$ vilket insättes i den första ekvationen: $12y^2 - y = 0$, vilken har två lösningar $y = 0$ och $y = 1/12$. Vi har alltså två stationära punkter nämligen $(0,0)$ och $(1/6, 1/12)$. Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. I de två punkterna får vi $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $1 \pm \sqrt{2}$, så att matrisen är indefinit, och $f''(1/6, 1/12) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $(3 \pm \sqrt{5})/2$, så att matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(0,0)$ är en sadelpunkt och att $(1/6, 1/12)$ är en minimipunkt.

---

4. Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1 - \bar{X}_1 - \bar{X}_1\bar{X}_2 &= 0, \\ 1 - \bar{X}_2 - \bar{X}_1\bar{X}_2 &= 0, \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ och $\bar{X}_1^2 + \bar{X}_1 - 1 = 0$, med rötterna

$$X_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vi ser att $0 < X_+ < 1$ och $X_- < 0$. Den enda tillåtna stationära punkten är alltså $\bar{X} = \begin{bmatrix} X_+ \\ X_+ \end{bmatrix}$. Linjärisering kring denna punkt leder till det linjära systemet $x' = Ax$ med Jacobi-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 - X_+ & -X_+ \\ -X_+ & -1 - X_+ \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - 2X_+$. Eftersom båda är negativa är systemet stabilt.

---

5. Med $v(x) = xc(x)$ övergår differentialekvationen i

$$-v''(x) + \phi^2 v(x) = 0,$$

med karakteristiska ekvationen $-r^2 + \phi^2 = 0$. Rötterna är $r = \pm\phi$ och allmänna lösningen blir

$$v(x) = Ce^{\phi x} + De^{-\phi x} = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x),$$

så att

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{1}{x}(A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x)), \\ c'(x) &= -\frac{1}{x^2}(A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x)) + \frac{\phi}{x}(A\sinh(\phi x) + B\cosh(\phi x)) \\ &= A\phi^2 \frac{\phi x\sinh(\phi x) - \cosh(\phi x)}{(\phi x)^2} + B\phi^2 \frac{\phi x\cosh(\phi x) - \sinh(\phi x)}{(\phi x)^2}. \end{aligned}$$

Taylorutvecklingarna $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$, $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ visar att uttrycket efter A i $c'(x)$ går mot ∞, och uttrycket efter B går mot 0, då x går mot 0. Därför måste $A = 0$ och randvillkoret ger

$$0 = c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = -B\sinh(\phi) + B\phi\cosh(\phi) + \nu\big(B\sinh(\phi) - 1\big)$$

så att

$$B = \frac{\nu}{(\nu - 1)\sinh(\phi) + \phi\cosh(\phi)}.$$

Lösningen blir

$$c(x) = \frac{\nu\sinh(\phi x)}{x((\nu - 1)\sinh(\phi) + \phi\cosh(\phi))}.$$

Effektivitetsfaktorn blir med $c = \nu/((\nu - 1)\sinh(\phi) + \phi\cosh(\phi))$

$$\begin{aligned} \eta &= 3\int_0^1 c(x)x^2\,dx \\ &= 3c\int_0^1 x\sinh(\phi x)\,dx = \frac{3c}{\phi^2}\int_0^\phi s\sinh(s)\,ds \\ &= \{\text{ partiell integration }\} = \frac{3c}{\phi^2}\Big(\phi\cosh(\phi) - \sinh(\phi)\Big). \end{aligned}$$

(c) Differentialekvationen är matematisk modell för reaktion och diffusion i en porös katalysatorpellet vid isoterma och stationära förhållanden och sfärisk geometri. Ekvationen är skriven på dimensionslös form. Det första randvillkoret betyder att lösningen är en jämn funktion. Det andra randvillkoret beskriver flödet genom randen. ν är en dimensionslös genomgångskoefficient. η är effektivitetsfaktorn.

5*. Ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ i (DE) och (RV) leder till

$$X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < 1;\ X(0) = X(1) = 0, \tag{1}$$

$$T'(t) = 4\lambda T(t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Egenvärdesproblemet (1) har lösningen

$$\lambda_n = -(n\pi)^2,\ X_n(x) = \sin n\pi x,\ n = 1, 2, \dots ,$$

och ekvation (2) blir då $T_n'(t) = -4(n\pi)^2 T_n(t)$ med lösningen $T_n(t) = C_n e^{-4(n\pi)^2 t}$. Serien

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

löser alltså (DE) och (RV). (BV) ger

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x.$$

Multiplikation med $\sin k\pi x$ och integration ger

$$\int_0^1 \sin k\pi x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x\,dx = \frac{1}{2}C_k,$$

där vi använt ortogonalitetsrelationerna

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x\,dx = \frac{1}{2}\delta_{nk}.$$

Vi har alltså

$$C_n = 2\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \left[-2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = 2\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi},$$

så att lösningen blir

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} e^{-4(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

/stig