Matematik Chalmers

Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, 1998–05–23

Telefon: Ola Helenius, 772 53 36
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.
Uppgifterna är värda 10 poäng vardera.

---

1. Funktionen f är periodisk med period 6 och $f(t) = 1$ för $|t| \leq 1$, $f(t) = 0$ för $1 < |t| \leq 3$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita amplitudspektrum (de första 7 termerna räcker).

2. Låt $f(x, y, z) = r^a$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och a är en reell konstant. (a) Bestäm ∇f. (b) Bestäm de värden på a för vilka f uppfyller Laplaces ekvation $\Delta f = 0$. (Tips: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$)

3. Bestäm alla stationära lösningar till systemet

$$\begin{aligned} X_1' &= 1 - X_1 - X_1 X_2, \\ X_2' &= -4 - X_2 + X_1 X_2. \end{aligned}$$

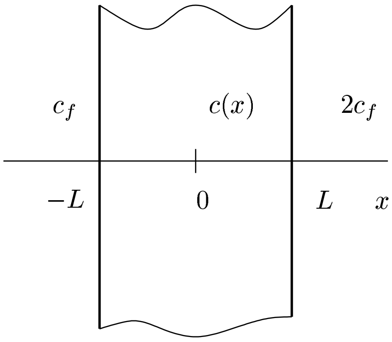
Linjärisera kring de stationära lösningarna och undersök de linjäriserade systemens stabilitet.

4. Undersök funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2^2 - 27x_1$ med avseende på lokala maxima och minima.

5. Koncentrationen c av det reagerande ämnet i en porös katalysator i form av en platta (se figuren) bestäms av ekvationen

$$-Dc''(x) = -kc(x), \quad -L < x < L,$$

där diffusionskonstanten D och reaktionshastighetskonstanten k är positiva konstanter. Koncentrationen är c_f till vänster och $2c_f$ till höger om plattan.



(a) Vilka av följande fyra randvillkor är rimliga vid $x = -L$? ($h > 0$)

$$\begin{aligned} Dc'(-L) + h\big(c(-L) - c_f\big) &= 0, \\ -Dc'(-L) + h\big(c(-L) - c_f\big) &= 0, \\ c(-L) = c_f, \qquad c'(-L) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Visa hur ekvationen kan skrivas på dimensionslös form

$$-u''(r) = -\phi^2 u(r), \quad -1 < r < 1,$$

där u är en lämpligt vald dimensionslös koncentration och r är en lämpligt vald dimensionslös koordinat.

(c) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(r) &= -\phi^2 u(r), \quad -1 < r < 1, \\ u(-1) &= 1, \ u(1) = 2. \end{aligned}$$

Uttryck sedan koncentrationen i de ursprungliga dimensionsbärande variablerna.

(d) För vilka värden på ϕ får vi ett *utflöde* av massa vid $x = -L$ i uppgift (c)?

/stig