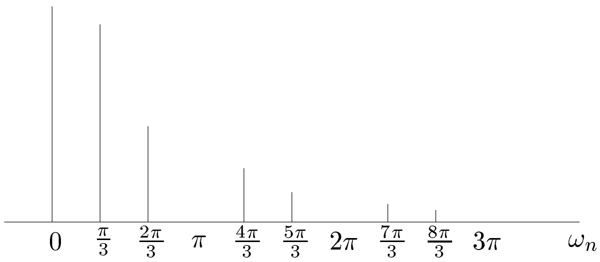
TMA681 Tillämpad matematik K, 1998–05–23. Lösningar.

1.

$$
\begin{aligned}
&T = 6,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}\\
&b_n = 0, \quad \text{ty } f \text{ är jämn}\\
&a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt\\
&\quad = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{3}\,dt\\
&\quad = \frac{2}{3}\left[\frac{\sin\frac{n\pi t}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\\
&a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 dt = \frac{2}{3}\\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big)\\
&\quad = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi t}{3}\\
&\quad = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cos\frac{2\pi t}{3} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\cos\frac{4\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{5\pi}\cos\frac{5\pi t}{3}\\
&\qquad + 0 + \frac{\sqrt{3}}{7\pi}\cos\frac{7\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\cos\frac{8\pi t}{3} + 0 + \cdots
\end{aligned}
$$

Amplitudspektrum:



2.

$$
\begin{aligned}
&f(x,y,z) = r^a, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},\\
&\frac{\partial f}{\partial x} = ar^{a-1}\frac{\partial r}{\partial x} = ar^{a-2}x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ar^{a-2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ar^{a-2}z,\\
&\nabla f = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{bmatrix} = ar^{a-2}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a(a-2)r^{a-3}\frac{\partial r}{\partial x}x + ar^{a-2} = a(a-2)r^{a-4}x^2 + ar^{a-2},\\
&\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = a\big((a-2)r^{a-4}(x^2+y^2+z^2) + 3r^{a-2}\big) = a(a+1)r^{a-2},\\
&\Delta f = 0 \text{ för alla } r \neq 0 \text{ om och endast om } a = 0 \text{ eller } a = -1.
\end{aligned}
$$

3. Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1 - \bar{X}_1 - \bar{X}_1\bar{X}_2 &= 0, \\ -4 - \bar{X}_2 + \bar{X}_1\bar{X}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $\bar{X}_2 = (1-\bar{X}_1)/\bar{X}_1$, vilket insatt i den andra ekvationen ger

$$-4 - \frac{1-\bar{X}_1}{\bar{X}_1} + 1 - \bar{X}_1 = 0.$$

Förlängning med $\bar{X}_1$ leder till $\bar{X}_1^2 + 2\bar{X}_1 + 1 = 0$ med den enda lösningen $\bar{X}_1 = -1$. Vi får sedan $\bar{X}_2 = -2$. Den enda stationära lösningen är alltså $\bar{X} = \big[-1, -2\big]^t$.
Linjärisering kring denna punkt leder till det linjära systemet $x' = Ax$ med Jacobi-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1-\bar{X}_2 & -\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 & -1+\bar{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. Eftersom båda är ≤ 0 är systemet stabilt.

4. De lokala extrempunkterna till funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2^2 - 27x_1$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2) &= 3x_1^2 + 3x_2^2 - 27 = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2) &= 3x_2^2 + 6x_1x_2 = 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $3x_2(x_2 + 2x_1) = 0$, vilket leder till $x_2 = 0$ eller $x_2 = -2x_1$. Insättning av $x_2 = 0$ i den första ekvationen ger $x_1 = \pm 3$. Insättning av $x_2 = -2x_1$ i den första ekvationen ger $x_1 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$. Vi har alltså fyra stationära punkter nämligen $(\pm 3, 0)$ och $(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}, \mp\frac{6}{\sqrt{5}})$.
Hessematrisen är $f''(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 6x_2 \\ 6x_2 & 6(x_1+x_2) \end{bmatrix}$.
I de två punkterna $(\pm 3, 0)$ får vi $f''(\pm 3, 0) = \begin{bmatrix} \pm 18 & 0 \\ 0 & \pm 18 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 18$, så att matrisen är positivt definit i $(3, 0)$ och negativt definit i $(-3, 0)$.
I de två punkterna $(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}, \mp\frac{6}{\sqrt{5}})$ får vi $f''(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}, \mp\frac{6}{\sqrt{5}}) = \pm\frac{18}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, där den senare matrisen har egenvärdena $\pm\sqrt{5}$, så att Hesse-matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -18$, $\lambda_2 = 18$ i båda punkterna. Hessematrisen är alltså indefinit.
Slutsats: lokalt minimum i $(3, 0)$, lokalt maximum i $(-3, 0)$, samt sadelpunkter i $(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}, \mp\frac{6}{\sqrt{5}})$.

5. (a) Det första randvillkoret är orimligt, de övriga är rimliga. Massflödet (i x-riktningen) är $-Dc'$. Det andra randvillkoret betyder att massflödet ut genom ytan (dvs i negativa x-riktningen) $Dc'(-L) = h(c(-L) - c_f)$ är proportionellt mot skillnaden mellan koncentrationen innanför och utanför med proportionalitetskonstanten h, dvs hög koncentration inuti ger massflöde ut. Det första villkoret innebär det motsatta förhållandet, vilket är orimligt. Det tredje och fjärde randvillkoret svarar mot de ideala extremfallen $h = \infty$ (inget flödesmotstånd) respektive $h = 0$ (tät yta).
(b) Multiplicera ekvationen med $L^2/(Dc_f)$ så fås

$$-L^2\frac{c''(x)}{c_f} = -L^2\frac{k}{D}\frac{c(x)}{c_f}.$$

Sätt $r = x/L$, $x = Lr$ och $u(r) = c(Lr)/c_f$, så fås $u''(r) = L^2 c''(Lr)/c_f$ och

$$-u''(r) = -\phi^2 u(r), \quad \phi = L\sqrt{k/D}.$$

(c) Differentialekvationen är $u'' - \phi^2 u = 0$, karakteristiska ekvationen är $p^2 - \phi^2 = 0$ med rötterna $p = \pm\phi$. Allmänna lösningen blir

$$u(r) = C_1 e^{\phi r} + C_2 e^{-\phi r} = A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r),$$

där $A = (C_1 + C_2)/2$, $B = (C_1 - C_2)/2$; obs att

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2, \qquad e^x = \cosh x + \sinh x,$$
$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2, \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$$

Randvillkoren ger

$$1 = u(-1) = A\cosh(-\phi) + B\sinh(-\phi) = A\cosh(\phi) - B\sinh(\phi),$$
$$2 = u(1) = A\cosh(\phi) + B\sinh(\phi),$$

så att (genom att addera respektive subtrahera ekvationerna)

$$A = \frac{3}{2\cosh(\phi)}, \quad B = \frac{1}{2\sinh(\phi)},$$

och lösningen blir

$$u(r) = \frac{3}{2}\frac{\cosh(\phi r)}{\cosh(\phi)} + \frac{1}{2}\frac{\sinh(\phi r)}{\sinh(\phi)}.$$

I de ursprungliga variablerna

$$c(x) = u\big(\frac{x}{L}\big)\, c_f = \left(\frac{3}{2}\frac{\cosh(\sqrt{\frac{k}{D}}x)}{\cosh(\sqrt{\frac{k}{D}}L)} + \frac{1}{2}\frac{\sinh(\sqrt{\frac{k}{D}}x)}{\sinh(\sqrt{\frac{k}{D}}L)}\right) c_f.$$

(d) Flödet (i dimensionslösa variabler) är

$$-u'(-1) = -\frac{1}{2}\frac{\phi}{\tanh(\phi)}\big(1 - 3\tanh^2(\phi)\big).$$

Flödet går ut om $-u'(-1) < 0$, dvs om $0 \le \tanh(\phi) < 1/\sqrt{3}$, dvs om

$$0 \le \phi < \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

/stig