TMA681 Tillämpad matematik K, 1998–08–26. Lösningar.

1.

$$T = 6,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$$
$$a_n = 0, \quad \text{ty } f \text{ är udda}$$
$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\sin\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \sin\frac{n\pi t}{3}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{-\cos\frac{n\pi t}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{3}\Big)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\sin n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{3}\Big)\sin\frac{n\pi t}{3} \\
&= \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{3} + \frac{4}{3\pi}\sin\pi t + \frac{3}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{3} + \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi t}{3} \\
&\quad + 0 + \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi t}{3} + \cdots
\end{aligned}$$

Amplitudspektrum:

2. Vi har

$$\begin{aligned}
u'_x &= t^a \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)\left(-\frac{2x}{bt}\right) = -\frac{2x}{bt}u, \quad u'_y = -\frac{2y}{bt}u, \\
u''_{xx} &= -\frac{2}{bt}u + \left(-\frac{2x}{bt}\right)^2 u = \left(-\frac{2}{bt} + \frac{4x^2}{b^2t^2}\right)u,
\end{aligned}$$

och analogt för u''_{yy}. Addition av dessa ger

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \left(-4\frac{1}{bt} + 4\frac{x^2+y^2}{b^2t^2}\right)u.$$

Dessutom har vi

$$\begin{aligned}
u'_t &= at^{a-1}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right) + t^a\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{bt^2}\right) \\
&= \left(\frac{a}{t} + \frac{x^2+y^2}{bt^2}\right)u.
\end{aligned}$$

Insättning i ekvationen $u'_t = \kappa(u''_{xx} + u''_{yy})$ ger $a = -1$, $b = 4\kappa$.

3. Stationära lösningar ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
0 &= -\bar{X}_1 + \frac{2}{\bar{X}_2 + 1}, \\
0 &= k\bar{X}_1 - k\bar{X}_2.
\end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ och den första ger sedan $\bar{X}_1^2 + \bar{X}_1 - 2 = 0$ med rötterna $\bar{X}_1 = 1$ och $\bar{X}_1 = -2$. Enligt förutsättningarna ska $\bar{X}_1$ och $\bar{X}_2$ vara ≥ 0, och vi får då endast en stationär lösning $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 1$. Jacobimatrisen är

$$\begin{bmatrix} -1 & \dfrac{-2}{(X_2+1)^2} \\ k & -k \end{bmatrix}.$$

I den stationära lösningen $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 1$ får vi

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ k & -k \end{bmatrix}$$

med egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2 - 6k}}{2}.$$

Med $k = 9$ får vi $\lambda_{1,2} = (-10 \pm \sqrt{46})/2 < 0$, ty $\sqrt{46} < 7$. För $k > 0$ får vi två fall: (i) Med $2-\sqrt{3} < k < 2+\sqrt{3}$ har vi komplexa egenvärden med realdelarna lika med $-(k+1)/2 < 0$. (ii) Annars har vi reella egenvärden $\lambda_{1,2} < 0$ ty $\sqrt{(k+1)^2 - 6k} < k+1$. Systemet är stabilt i samtliga fall.

4. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 8x - 4y + 3 = 0 \\ f'_y(x,y) &= 6y - 4x = 0 \end{aligned}$$

med den enda lösningen $x = -\frac{9}{16}$, $y = -\frac{3}{8}$. Vi har alltså en unik extrempunkt nämligen $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$. Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_{\pm} = 7 \pm \sqrt{17} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$ är en minimipunkt. Eftersom det inte finns några andra extrempunkter, så är det ett globalt minimum.

5. Med $v(x) = xu(x)$ övergår differentialekvationen i

$$-v''(x) + \phi^2 v(x) = 0,$$

med karakteristiska ekvationen $-r^2 + \phi^2 = 0$. Rötterna är $r = \pm\phi$ och allmänna lösningen blir

$$v(x) = Ae^{\phi x} + Be^{-\phi x} = C\cosh(\phi x) + D\sinh(\phi x),$$

så att

$$u(x) = \frac{v(x)}{x} = \frac{1}{x}\big(C\cosh(\phi x) + D\sinh(\phi x)\big).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} 1 &= u(-1) = -\big(C\cosh(-\phi) + D\sinh(-\phi)\big) = -C\cosh(\phi) + D\sinh(\phi), \\ 1 &= u(1) = C\cosh(\phi) + D\sinh(\phi), \end{aligned}$$

dvs $C = 0$, $D = 1/\sinh(\phi)$. Lösningen blir

$$u(x) = \frac{\sinh(\phi x)}{x\sinh(\phi)}.$$

Eftersom $\sinh(x)/x \to 1$ då $x \to 0$ (ty Maclaurinutvecklingen är $\sinh(x) = x + O(x^2)$ då $x \to 0$), och

$$u(x) = \frac{\phi}{\sinh(\phi)} \frac{\sinh(\phi x)}{\phi x},$$

ser vi att $u(0) = \phi/\sinh(\phi)$, och att $u(x) \to 1$ då $\phi \to 0$ med x fixt, vilket stämmer överens med att lösningen till randvärdesproblemet är $u(x) \equiv 1$ om $\phi = 0$.

/stig