Matematik Chalmers

**Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, 1999–01–15**

Telefon:
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.
Uppgifterna är värda 10 poäng vardera.

---

**1.** Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för funktionen $f(x,y) = e^{-x^2/y}$ med avseende på punkten $(0,1)$.

**2.** Vilken typ av kurva bestäms av ekvationen

$$13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72?$$

Rita kurvan. Vilka punkter på kurvan ligger närmast origo?

**3.** Bestäm koefficienter $a, b$ så att funktionen

$$u(x,y,t) = t^a \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)$$

löser värmeledningsekvationen $u'_t = \kappa(u''_{xx} + u''_{yy})$, där $\kappa > 0$.

**4.** (a) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -c''(x) &= -\phi^2 c(x), \quad 0 < x < 1, \\ c'(0) = 0,\ c'(1) &+ \nu\big(c(1) - 1\big) = 0, \end{aligned}$$

där $\phi, \nu$ är konstanter.

(b) Beräkna kvantiteten $\eta = \int_0^1 c(x)\,dx$.

(c) Ange en kemiteknisk tolkning av differentialekvationen, randvillkoren och kvantiteten $\eta$.

**5.** Två likadana tankreaktorer med volymen $V$ [m$^3$] är kopplade i serie enligt figuren. Vi antar för enkelhets skull att flödet $q$ [m$^3$/s] och temperaturen $T$ [K] är konstanta. Ett ämne omsätts i båda reaktorerna genom en reaktion av *andra ordningen*, dvs reaktionshastigheten ges av $kc^2$ [mol/s], där $c$ [mol/m$^3$] är koncentrationen och $k$ är en hastighetskonstant. (En reaktion sägs vara av ordning $p$, om reaktionshastigheten ges av $kc^p$ [mol/s].)

(a) Ställ upp balansekvationerna för massa i de två reaktorerna. ($c_f$, $c_1$ och $c_2$ är koncentrationen av det intressanta ämnet i inflödet, första reaktorn, respektive andra reaktorn enligt figuren.)

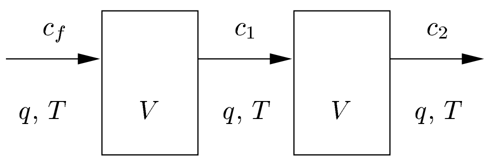
(b) Visa hur man skriver om ekvationerna på dimensionslös form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}X_1 &= 1 - X_1 - \alpha X_1^2, \\ \frac{d}{ds}X_2 &= X_1 - X_2 - \alpha X_2^2. \end{aligned}$$

Tips: $s = t/\tau$, $\tau = V/q$ [s]. Du måste ange uttrycket för $\alpha$ i de givna storheterna.

(c) Bestäm den stationära lösningen. (Obs att koncentrationen inte kan vara negativ.)

(d) Linjärisera kring den stationära lösningen. Är det linjäriserade systemet stabilt?




/stig