TMA681 Tillämpad matematik K, 1999–01–15. Lösningar.

1.

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = e^{-x^2/y}, && f(0,1) = 1\\
&f'_x(x,y) = -\frac{2x}{y} f(x,y), && f'_x(0,1) = 0\\
&f'_y(x,y) = \frac{x^2}{y^2} f(x,y), && f'_y(0,1) = 0\\
&f''_{xx}(x,y) = -\frac{2}{y} f(x,y) - \frac{2x}{y} f'_x(x,y), && f''_{xx}(0,1) = -2\\
&f''_{xy}(x,y) = \frac{2x}{y^2} f(x,y) - \frac{2x}{y} f'_y(x,y), && f''_{xy}(0,1) = 0\\
&f''_{yy}(x,y) = -\frac{2x^2}{y^3} f(x,y) + \frac{x^2}{y^2} f'_y(x,y), && f''_{yy}(0,1) = 0
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet är $P(x,y) = 1 - x^2$.

2. Ekvationen skrivs på matrisform:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 72.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$ och egenvektorer $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dvs

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = PDP^t.$$

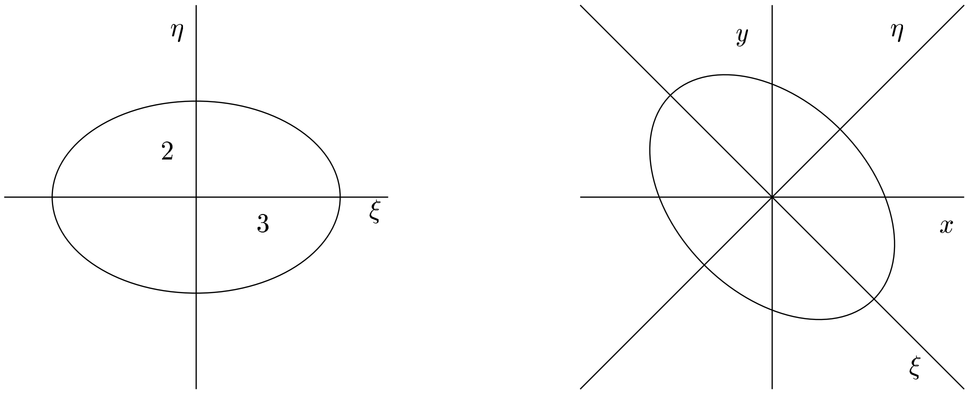
Med koordinattransformationen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ blir ekvationen

$$8\xi^2 + 18\eta^2 = 72,$$

dvs

$$\frac{\xi^2}{9} + \frac{\eta^2}{4} = 1.$$

Detta är en ellips med halvaxlarna 3 och 2, se figuren. De punkter som ligger närmast origo är $\xi = 0$, $\eta = \pm 2$, dvs $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 2 \end{bmatrix} = \pm\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



3. Vi har

$$u'_x = t^a \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)\left(-\frac{2x}{bt}\right) = -\frac{2x}{bt}u, \quad u'_y = -\frac{2y}{bt}u,$$
$$u''_{xx} = -\frac{2}{bt}u + \left(-\frac{2x}{bt}\right)^2 u = \left(-\frac{2}{bt} + \frac{4x^2}{b^2t^2}\right)u,$$

och analogt för u''_{yy}. Addition av dessa ger

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \left(-4\frac{1}{bt} + 4\frac{x^2+y^2}{b^2t^2}\right)u.$$

Dessutom har vi

$$u'_t = at^{a-1}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right) + t^a \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{bt^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a}{t} + \frac{x^2+y^2}{bt^2}\right)u.$$

Insättning i ekvationen $u'_t = \kappa(u''_{xx} + u''_{yy})$ ger $a = -1$, $b = 4\kappa$.

4. (a) Allmänna lösningen blir

$$c(x) = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x)$$

med derivatan

$$c'(x) = A\phi\sinh(\phi x) + B\phi\cosh(\phi x).$$

Randvillkoren ger

$$0 = c'(0) = B\phi, \quad \text{så att } B = 0,$$
$$0 = c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = A\phi\sinh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi) - 1\big)$$

så att

$$A = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}$$

och

$$c(x) = \frac{\nu\cosh(\phi x)}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}.$$

(b)

$$\eta = \int_0^1 c(x)\,dx = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}\int_0^1 \cosh(\phi x)\,dx$$
$$= \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}\frac{\sinh(\phi)}{\phi} = \frac{\tanh(\phi)}{\phi}\frac{\nu}{\phi\tanh(\phi) + \nu}.$$

(c) Differentialekvationen är matematisk modell för reaktion och diffusion i en porös katalysatorpellet vid isoterma och stationära förhållanden och "platt" geometri. Ekvationen är skriven på dimensionslös form. Det första randvillkoret betyder att lösningen är en jämn funktion. Det andra randvillkoret beskriver flödet genom randen. ν är en dimensionslös genomgångskoefficient. η är effektivitetsfaktorn.

5. (a) Massbalans:

$$\frac{d}{dt}\Big(c_1 V\Big) = q(c_f - c_1) - kc_1^2,$$
$$\frac{d}{dt}\Big(c_2 V\Big) = q(c_1 - c_2) - kc_2^2.$$

(b) Dividera med qc_f:

$$\frac{V}{q}\frac{d}{dt}\Big(\frac{c_1}{c_f}\Big) = 1 - \frac{c_1}{c_f} - \frac{kc_f}{q}\Big(\frac{c_1}{c_f}\Big)^2,$$
$$\frac{V}{q}\frac{d}{dt}\Big(\frac{c_2}{c_f}\Big) = \frac{c_1}{c_f} - \frac{c_2}{c_f} - \frac{kc_f}{q}\Big(\frac{c_2}{c_f}\Big)^2.$$

Sätt

$$\tau = V/q,\ s = t/\tau,\ X_1(s) = \frac{c_1(s\tau)}{c_f},\ X_2(s) = \frac{c_2(s\tau)}{c_f},\ \alpha = \frac{kc_f}{q},$$

så fås $\tau\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}$ och

$$\frac{d}{ds}X_1 = 1 - X_1 - \alpha X_1^2,$$
$$\frac{d}{ds}X_2 = X_1 - X_2 - \alpha X_2^2.$$

(c) Stationära lösningar ges av ekvationssystemet

$$1 - X_1 - \alpha X_1^2 = 0,$$
$$X_1 - X_2 - \alpha X_2^2 = 0.$$

Den första ekvationen ger

$$X_1^2 + \frac{1}{\alpha}X_1 - \frac{1}{\alpha} = 0$$

med lösningarna

$$X_1 = -\frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2\alpha}.$$

Den enda positiva lösningen är

$$\bar{X}_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\alpha}}{2\alpha}.$$

Den andra ekvationen ger på samma vis

$$\bar{X}_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\alpha\bar{X}_1}}{2\alpha} = \frac{-1 + \sqrt{2\sqrt{1+4\alpha} - 1}}{2\alpha}.$$

(d) Det linjäriserade systemet är $x' = Ax$ med Jacobimatrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 - 2\alpha\bar{X}_1 & 0 \\ 1 & -1 - 2\alpha\bar{X}_2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen är triangulär och egenvärdena är därför lika med diagonalelementen, dvs $\lambda_1 = -1 - 2\alpha\bar{X}_1$, $\lambda_2 = -1 - 2\alpha\bar{X}_2$. Båda är negativa och systemet är stabilt.

`/stig`