Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, maj 2000

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

En stor del av frågorna förutsätter att du **har gjort, har förstått** och **kommer ihåg** *tankreaktorn* och *katalysatorn*. Jag har inte avvägt antalet frågor och deras svårighetsgrad så noga i denna övningstentamen. I själva verket har jag skrivit ned alldeles för många delfrågor för övningens skull.

1. (7 poäng) Funktionen f är periodisk med period 6 och $f(t) = 1$ för $|t| \leq 1$, $f(t) = 0$ för $1 < |t| \leq 3$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita amplitudspektrum (de första 7 termerna räcker).

2. (7 poäng) Undersök funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2^2 - 27x_1$ med avseende på lokala maxima och minima.

3. (12 poäng) Tankreaktorn. (a) Ställ upp värmebalansen för kylvattentanken och skriv sedan om den på dimensionslös form.

(b) Ge flera olika skäl till varför man skriver ekvationen på dimensionslös form.

(c) Antag att vi har den ursprungliga modellen med konstant kylvattenflöde. Antag att β är så litet att den önskade arbetspunkten är instabil. Rita några figurer som visar hur fasporträtten (för det ickelinjära systemet) typiskt ser ut. Man ska kunna se att det finns två andra stationära punkter.

(d) Beskriv hur man löser detta system av ODE med hjälp av matlab. Dvs skriv ned den m-fil och de kommandon som behövs. (Du behöver inte ha varje kommatecken rätt, men du ska övertyga mig om att du har gjort detta själv och att du har förstått principen.)

(e) Vilken roll spelar det linjäriserade systemet i en stabilitetsundersökning.

(f) Beskriv hur man bestämmer koefficienterna i Arrhenius lag från uppmätta reaktionshastigheter. (Ställ upp de formler och ekvationer som behövs, ange hur man löser dem med matlab.)

4. (12 poäng) Katalysatorn. (a) Definiera effektivitetsfaktorn η dels med i ord, dels med en matematisk formel.

(b) Skriv ned differentialekvationen och randvillkoren för katalysatorn i platt geometri. Lös detta randvärdesproblem. Beräkna η.

(c) Rita en figur som visar hur koncentrationen varierar med x dels för litet värde på Thielemodulen ϕ, dels för stort värde på ϕ. (Erinra dig de numeriska lösningar som du gjort med programmet adfem.) Förklara, utgående från ekvationens kemitekniska betydelse, skillnaden mellan de två kurvorna.

(d) Rita en figur som visar hur η varierar med ϕ. Diskutera denna utgående från ekvationens kemitekniska betydelse.

(e) Förklara dels i ord, dels med matematiska formler vad som menas med "förgiftning" av katalysatorn.

(e) Härled formeln för ϕ i sfäriska koordinater och sfärisk symmetri. Samma uppgift för platt och cylindrisk symmetri. Ge några skäl till varför vi studerar katalysatorn i sådan förenklad geometri.

(f) Härled Robins randvillkor (för katalysatorn) som uttrycker att massflödet genom ytan är proportionellt mot differensen av koncentrationerna innanför och utanför ytan. Hur får man Dirichlets respektive Neumanns randvillkor som extremfall av Robins?

(g) Vilken roll spelar Gauss divergenssats i härledningen av diffusionsekvationen?

5. (12 poäng) Rörelseekvationen för den dämpade pendeln är:

$$ml\theta''(t) = -mg\sin\theta(t) - bl\theta'(t).$$

(a) Skriv denna som ett system av två ODE av första ordningen.

(b) Linjärisera kring övre jämviktsläget.

Vänd!

(c) Rita en figur som visar hur fasporträttet för det linjäriserade systemet typiskt ser ut. (Erinra dig de numeriska lösningar som du gjort i vecka 3.)

(d) Bestäm systemets egenvärden. Dra slutsats om stabilitet/instabilitet.

(e) Skriv om det linjäriserade systemet som en ODE av andra ordningen. Laplacetransformera denna ekvation. Bestäm systemets poler. Dra slutsats om stabilitet/instabilitet.

`/stig`