Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2012–10–27; KL 14:00-18:00

Telefon: Hossein Raufi: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell. Kalkylator ej tillåten.
Uppgift 3 ger max 8p, resten av uppgifterna ger max 7 poäng var.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. Lös med Laplacetransformen ekvationen

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^{\tau} y(\tau)\, d\tau = \sin t \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 0.$$

2. Genomför VF och FEM proceduren och bestäm det linjära ekvationssystemet $A\xi = \mathbf{b}$ som svarar mot den styckvis linjära finitelementapproximationen till randvärdesproblemet.

$$-u'' + 2u' = 6, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = 5, \quad u(1) = 0,$$

i partitionen $\mathcal{T}_h : x_0 = 0,\, x_1 = 1/3,\, x_2 = 2/3,\, x_3 = 1, (h = 1/3)$ av intervallet $[0, 1]$.
Obs! matriselementen behöver inte beräknas men motivera avvikande element.

3. a) Bestäm Fourierserien för, den 2-periodiska, funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0, \\ \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

b) Bestäm summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

4. Låt $\varepsilon > 0$ och betrakta konvektion-diffusion-reaktionsproblemet

$$-\varepsilon u''(x) + (1 - x^2)u'(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u'(1) = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

Vissa följande stabilitetsuppskattningar:

$$\text{a)} \quad ||u|| \leq ||f|| \qquad \text{b)} \quad \sqrt{\varepsilon}||u'|| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||f||.$$

5. Använd variabelseparation och lös följande värmeledningsekvation

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} & \end{cases}$$

6. Bestäm en *a priori* feluppskattning för den styckvis linjära Galerkin approximationen till problemet

$$-u''(x) + xu'(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \qquad u'(0) = u(1) = 0.$$

i energinormen $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||_{L_2(I)}^2 + ||v'||_{L_2(I)}^2$.

7. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion. Visa att om

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

så är

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

LYCKA TILL!

MA

Table of Laplace Transforms and trigonomerty

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
$2\sin a\sin b \quad =$	$=\cos(a-b)-\cos(a+b)$
$2\sin a\cos b \quad =$	$=\sin(a-b)+\sin(a+b)$
$2\cos a\cos b \quad =$	$=\cos(a-b)+\cos(a+b)$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2012–10–27; KL 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Vi har att

$$y(t) \supset Y(s), \quad y'(t) \supset sY(s) - y(0), \quad \int_0^t y(\tau)\,d\tau \supset \frac{1}{s}Y(s), \qquad \sin(t) \supset \frac{1}{s^2+1}.$$

Laplacetransformering av ekvationen ger

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Med $y(0) = 0$ får vi,

$$\frac{s^2+2s+1}{s}Y(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

dvs

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s+1)^2}.$$

Vi partialbråksuppdelar $Y(s)$ och får

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+2s+1)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\Big]$$

Nu använder vi oss av $f(t) =: \frac{t^n}{n!} \supset \frac{1}{s^{n+1}} =: F(s)$, med $n = 1$ och $e^{-at}f(t) \supset F(s+a)$ med $a = 1$ och får att inverstransformen till $Y(s)$ som

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

2. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(1) = 0\}$ och integrera över $I = [0,1]$,

$$\int_0^1 u'v'\,dx - [u'(x)v(x)]_0^1 + 2\int_0^1 u'v\,dx = 6\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + 2\int_0^1 u'v\,dx = 6\int_0^1 v\,dx - 5v(0), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Motsvarande finitelementmetoden är:
Finn $U \in V_h^0 = \{w : w \text{ är kontinuerlig styckvis linjär på } \mathcal{T}_h,\ w(1) = 0\}$ så att

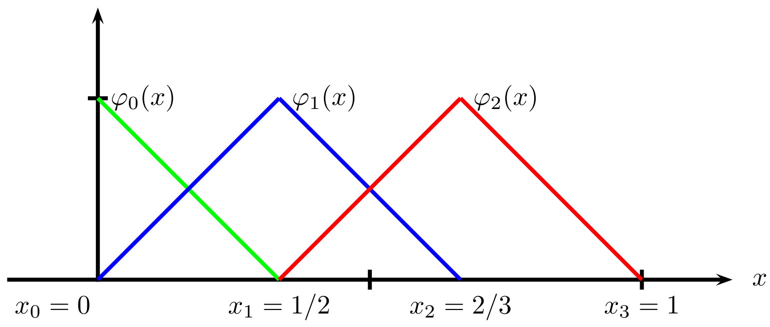
$$\text{(FEM)} \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + 2\int_0^1 U'v\,dx = 6\int_0^1 v\,dx - 5v(0), \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Vi har att $U(x) = \xi_0\varphi_0(x) + \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -3x+1 & 0 \le x \le 1/3 \\ 0 & 1/3 \le x \le 1 \end{cases} \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x \le 1/3 \\ 2-3x & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 0 & 2/3 \le x \le 1 \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1/3 \\ 3x-1 & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 3-3x & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

är basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$ och $\xi_0 = U(x_0)$, $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$.
Vi sätter in $U(x) = \xi_0\varphi_0(x) + \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i FEM, och "testar" mot bas funktioner i V_h^0: $v = \varphi_i(x)$, $i = 0,1,2$. Vi får en 3×3 linjär ekvationssystem för ξ_0, ξ_1 och ξ_2 på formen $A\xi = \mathbf{b}$ (med $A = S + 2K$, där S och K är styvhets- resp. konvektions-matris), dvs

$$A = \left[\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_0'}^2 & \int_0^1 \varphi_0'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_0'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_0' & \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_0' & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_0\varphi_0' & \int_0^1 \varphi_0\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_0\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_1\varphi_0' & \int_0^1 \varphi_1\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_0' & \int_0^1 \varphi_2\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2' \end{pmatrix}\right]$$



$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = 6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_0 \\ \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi räknar de numeriska värdena för styvhet-, resp. konvektionsmatris för φ_0, φ_1 och φ_2 och får

$$A = \left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/3$ att

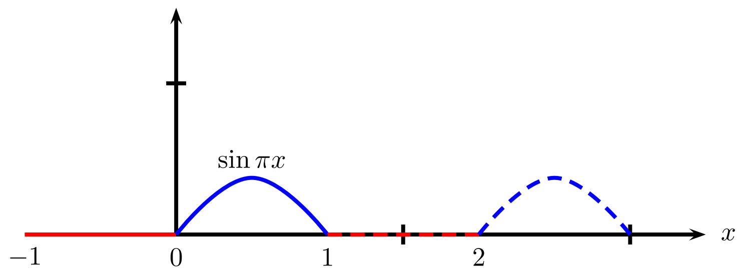
$$A\xi = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

DVS

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Och lösningen är då $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)^T = (-10, -8, -5)^T$.

3. a) Vi har att f är periodisk med perioden $2L = 2$, enl figuren nedan



f:s Fourierserie utveckling ges av

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

med Fourierkoefficienter

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 0, 1, \ldots) \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Vi har att $L = 1$ och $f(x) = \sin(\pi x)$ för $0 \le x \le 1$ och $f = 0$ för $1 \le x \le 2$, värför är

$$a_n = \int_0^1 \sin(\pi x) \cos n\pi x\, dx, \quad (n = 0, 1, \ldots) \qquad b_n = \int_0^1 \sin(\pi x) \sin n\pi x\, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Vi räknar a_0 separat

$$a_0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2\sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\,dx|_0^1 = -\frac{1}{\pi}[\cos(\pi) - \cos(0)] = \frac{2}{\pi}.$$

För $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 \sin(\pi x)\cos(n\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\Big[\sin(1+n)\pi x + \sin(1-n)\pi x\Big]\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{(1+n)\pi}\cos(1+n)\pi x + \frac{1}{(1-n)\pi}\cos(1-n)\pi x\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}\Big[\frac{(-1)^{1+n}-1}{(1+n)\pi} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{(1-n)\pi}\Big] \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ udda} \\ -\frac{1}{2}\Big[\frac{-2}{(1+n)\pi} + \frac{-2}{(1-n)\pi}\Big] = \frac{1}{(1+n)\pi} + \frac{1}{(1-n)\pi} = \frac{2}{(1-n^2)\pi} & n \text{ jämn} \end{cases}
\end{aligned}$$

och

$$b_n = \int_0^1 \sin(\pi x)\sin(n\pi x)\,dx == \begin{cases} 1/2 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1. \end{cases}$$

Alltså f har Fourierserien (obs likhet p.g.a att f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}sin(\pi x) - \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2\pi nx).$$

b) Sätt $x = 0$ i Fourierserien ovan. Vi får

$$0 = f(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

Dvs

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. a) Multiplicera ekvationen med lösningen u, och integrera över $(0,1)$. Partialintegration och randdata ger att

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon u'(x)u(x)|_0^1 + \varepsilon\int_0^1 u'(x)^2\,dx + \int_0^1 (1-x^2)u'(x)u(x)\,dx + \int_0^1 u(x)^2\,dx = \int_0^1 f(x)u(x)\,dx \\
&\leq ||f||\cdot||u|| \leq \frac{1}{2}||f||^2 + \frac{1}{2}||u||^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Vidare, med $u(0) = u'(1) = 0$, gäller det att

$$\int_0^1 (1-x^2)u'(x)u(x)\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u^2(x))\,dx = \frac{1}{2}(1-x^2)u^2(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (-2x)\frac{1}{2}u^2(x)\,dx = \int_0^1 xu^2(x)\,dx \geq 0.$$

Värför, enligt (1), och insättning av randdata har vi att

$$\varepsilon||u'||^2 + ||u||^2 \leq \frac{1}{2}||f||^2 + \frac{1}{2}||u||^2,$$

eller

$$\varepsilon||u'||^2 + \frac{1}{2}||u||^2 \leq \frac{1}{2}||f||^2,$$

som ger både uppskattningarna.

5. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Då ger DE för u $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$, och vi får 2 separata ODE, en för X och en för T:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \qquad \text{och} \quad T' = \lambda T.$$

För T får vi lösningen

$$T(t) = T(0)e^{\lambda t}.$$

För att bestämma X från egenvärdesproblemet med Dirichelet randdata har vi att $\lambda < 0$. Vi sätter $\lambda = -\mu^2$ och får, m.h.a. randdata, egenparet:

$$\mu = n, \qquad , \lambda_n = -n^2 \qquad X_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Värför, med superposition, har vi att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

och begynnelsedatan blir

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

Alltså B_n är Fourier-sinusserie koefficienter för funktionen $u(x,0)$, i den ortogonala basen $\{\sin nx\}_1^\infty$ på intervallet $[0,\pi]$. Alltså

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,0)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(x\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos nx}{n}\Big) + \frac{2}{\pi}\Big((\pi - x)\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} -\frac{-\cos nx}{n}\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\pi/2)}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\pi/2)}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\sin n\pi/2}{n^2} + \frac{2}{\pi}\frac{\sin n\pi/2}{n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{\sin n\pi/2}{n^2} = \frac{4}{\pi}\begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Slutligen har vi att lösningen är

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x.$$

6. We multiply the differential equation by a test function $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ and integrate over I. Using partial integration and the boundary conditions we get the following *variational problem*: Find $u \in H_0^1(I)$ such that

$$\int_I (u'v' + xu'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{3}$$

A *Finite Element Method* with $cG(1)$ reads as follows: Find $U \in V_h^0$ such that

$$\int_I (U'v' + xU'v + Uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{4}$$

where

$$V_h^0 = \{v : v \text{ is piecewise linear and continuous in a partition of } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Now let $e = u - U$, then (3)-(4) gives that

$$\int_I (e'v' + xe'v + ev) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}. \tag{5}$$

We note that using $e(0) = e(1) = 0$, we get

$$\int_I xe'e = \frac{1}{2}\int_I x\frac{d}{dx}(e^2) = \frac{1}{2}(xe^2)|_0^1 - \frac{1}{2}\int_I e^2 = -\frac{1}{2}\int_I e^2, \tag{6}$$

Further, using Poincare inequality we have

$$\|e\|^2 \le \|e'\|^2.$$

A priori error estimate: We use (5) and (6) to get

$$\begin{aligned}
\|e'\|^2_{L_2(I)} + \frac{1}{2}\|e\|^2_{L_2} &= \int_I (e'e' + \frac{1}{2}ee) = \int_I (e'e' + xe'e + ee) \\
&= \int_I \Big(e'(u-U)' + xe'(u-U) + e(u-U) \Big) = \{v = U - \pi_h u \text{ i}(5)\} \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + xe'(u-\pi_h u) + e(u-\pi_h u) \Big) \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\| \|e'\| + \|u-\pi_h u\| \|e'\| + \|u-\pi_h u\| \|e\| \\
&\le \{\|(u-\pi_h u)'\| + \|u-\pi_h u\|\} \|e\|_{H^1} \\
&\le C_i \{\|hu''\| + \|h^2 u''\|\} \|e\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

this gives that

$$\|e\|_{H^1} \le 2C_i\{\|hu''\| + \|h^2 u''\|\}.$$

which is the a priori error estimate.

7. Se “Lecture TMA682 Notes”.

MA