Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2013–01–17; KL 8:30-12:30

Telefon: Dawan Mustafa: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell. Kalkylator ej tillåten.
Uppgifterna 1-6 ger max 7 poäng var, uppgift 7 ger max 8p.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. Lös med Laplacetransformen ekvationen

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin t, \quad t \geq 0; \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

2. Bestäm interpolationsfelet

$$e = \int_0^1 \Big(\pi_1 f(x) - f(x)\Big)\, dx,$$

då $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ och $\pi_1 f(x)$ är den styckvis linjära interpolanten av $f(x)$ i partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, och $x_2 = 1$.

3. a) Bestäm Fourierserien för, den π-periodiska, funktionen

$$f(x) = |\sin x|, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

b) Bestäm summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

4. Genomför VF och FEM proceduren och bestäm styvhet-, konvektion- och mass-matris, samt lastvektorn för den styckvis linjära finitelementapproximationen till randvärdesproblemet.

$$-u'' + 2u' + u = 4, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = 3,$$

i partitionen $\mathcal{T}_h : x_0 = 0,\, x_1 = 1/2,\, x_2 = 1, (h = 1/2)$ av intervallet $[0, 1]$.
Obs! Alla matriselementen skall beräknas.

5. Visa en *a priori* feluppskattning för den styckvis linjära Galerkin approximationen till problemet

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

i energinormen $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||_{L_2(I)}^2 + ||v'||_{L_2(I)}^2$.

6. Använd variabelseparation och lös följande värmeledningsekvation

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & & t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 < x < 1. & \end{cases}$$

7. Betrakta randvärdesproblemet

$$(BVP) \qquad \begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, & (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & & (RV). \end{cases}$$

Ange en variationsformulering (VF) och en minimeringsproblem (MP) för (BVP) och visa att

$$(VF) \Longleftrightarrow (MP).$$

LYCKA TILL!

MA

Table of Laplace Transforms and trigonomerty

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts} F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$
$2 \sin a \sin b \quad =$	$= \cos(a-b) - \cos(a+b)$
$2 \sin a \cos b \quad =$	$= \sin(a-b) + \sin(a+b)$
$2 \cos a \cos b \quad =$	$= \cos(a-b) + \cos(a+b)$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2013–01–17; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. Vi har att

$$y(t) \supset Y(s), \quad y'(t) \supset sY(s) - y(0), \qquad y''(t) \supset s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \qquad \sin(t) \supset \frac{1}{s^2+1}.$$

Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Med $y(0) = y'(0) = 0$ får vi,

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

dvs

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s-1)^2}.$$

Vi partialbråksuppdelar $Y(s)$ och får

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2-2s+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} \\ &= \frac{(A+C)s^3 + (-2A+B-C+D)s^2 + (A-2B+C)s + (B-C+D)}{(s^2+1)(s^2-2s+1)}. \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter i täljaren för $s^3,\ s^2,\ s,$ respktive $s^0 = 1$, ger linjära ekvationssystemtet

$$\begin{cases} A & & +C & & = 0 \\ -2A & +B & -C & +D & = 0 \\ A & -2B & +C & & = 0 \\ & B & -C & +D & = 1. \end{cases}$$

Lösningrn av ekvationssytemet är (kontrollera detta!) $A = 1/2$, $B = 0$, $C = -1/2$ och $D = 1/2$. Alltså vi har att

$$Y(s) = \frac{1}{2}\Big[\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\Big].$$

Nu använder vi oss av $f(t) =: \frac{t^n}{n!} \supset \frac{1}{s^{n+1}} =: F(s)$, med $n = 0, 1$ och $e^{at}f(t) \supset F(s-a)$ med $a = 1$ och får att inverstransformen till $Y(s)$ som

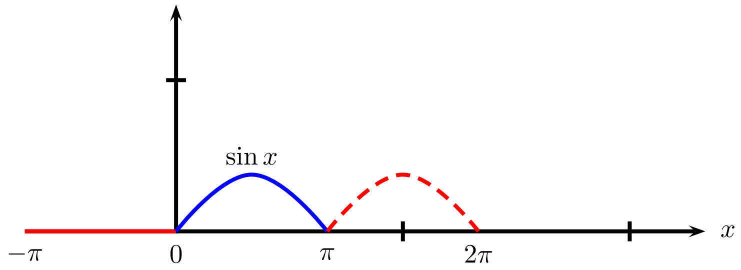
$$y(t) = \frac{1}{2}\Big(\cos(t) + (t-1)e^t\Big).$$

2. Vi har $\pi_1 f(0) = f(0) = 0$, $\pi_1 f(1/2) = f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$ och $\pi_1 f(1) = f(1) = (1)^2 = 1$. Vi har ochså att $\pi_1 f$ är linjär på båda intervallen $(0, 1/2)$ och $(1/2, 1)$. Värför har vi att

$$\pi_1 f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 1/2, \\ \frac{1}{2}(3x-1), & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Vi räknar fram felet

$$\begin{aligned} e &= \int_0^1 \Big(\pi_1 f(x) - f(x)\Big)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}x\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2}(3x-1)dx - \int_0^1 x^2\,dx \\ &= \frac{1}{4}[x^2]_0^{1/2} + \frac{1}{12}[(3x-1)^2]_{1/2}^1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = \frac{1}{16} + \frac{5}{16} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$



3. a) Vi har att f är periodisk med perioden $2L = \pi$ dvs $L = \pi/2$, enl figuren nedan f:s Fourierserie utveckling ges av

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Big),$$

med Fourierkoefficienter

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 0, 1, \dots) \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Vi har att $f(x) = |\sin x|$ är jämn därför $b_n = 0$ för alla n. Med $L = \pi/2$ och $f(x) = \sin(x)$ för $0 \le x \le \pi$, är

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos 2nx\, dx, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Vi räknar a_0 separat

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

För $n \ge 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(2nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \Big[\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x \Big]\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{1}{(1+2n)} \cos(1+2n)x - \frac{1}{(1-2n)\pi} \cos(1-2n)x \Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \Big[\frac{1}{(1+2n)} (1-(-1)) + \frac{1}{(1-2n)} (1-(-1)) \Big] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{(1+2n)(1-2n)} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}. \end{aligned}$$

Alltså $f(x) = |\sin x|$ har Fourierserien (obs likhet p.g.a att f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$)

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx).$$

b) Sätt $x = 0$ i Fourierserien ovan. Vi får

$$0 = f(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Dvs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

4. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ och integrera över $I = [0,1]$,

$$\int_0^1 u'v'\,dx - [u'(x)v(x)]_0^1 + 2\int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = 4\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + 2\int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 v\,dx + u'(1)v(1) = 4\int_0^1 v\,dx + 3v(1), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Motsvarande finitelementmetoden är:

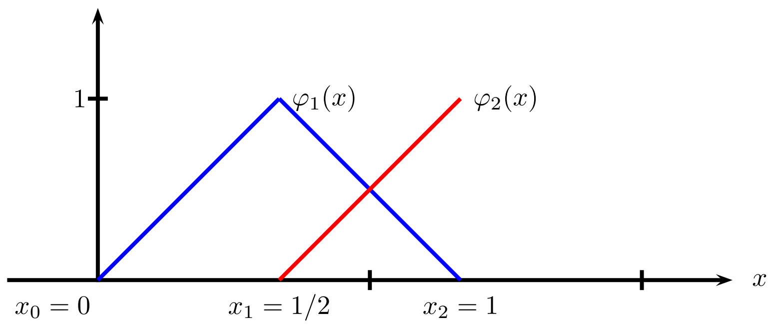
Finn $U \in V_h^0 = \{w : w$ är kontinuerlig styckvis linjär på $\mathcal{T}_h,\ w(0) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + 2\int_0^1 U'v\,dx = 4\int_0^1 v\,dx + 3v(1), \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - 2x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

är basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$ och $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$. Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) +$



$\xi_2\varphi_2(x)$ i FEM, och "testar" mot bas funktioner i V_h^0: $v = \varphi_i(x)$, $i = 1,2$. Vi får en 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 på formen $A\xi = \mathbf{b}$, med $A = S + 2K + M$, där S, K och M är styvhets- konvektions- och mass-matrier och $\mathbf{b}$ är lastvektor, dvs

$$A = \left[\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = 4\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi räknar fram numeriska formen av den slutgiltiga linjära ekvationssystemet för φ_1 och φ_2 och får

$$A = \left[\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/2$ att i ekvationen $A\xi = \mathbf{b}$, dvs $(S + 2K + M)\xi = \mathbf{b}$ vi har att

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. Varitionsformuleringen blir (efter partiell integration)

$$(VF) \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Låt nu

$$V_h^0 =: \{v : \ v \text{ linjär, styckvis kontinuerlig och } v(0) = v(1) = 0\} \subset H_0^1.$$

Finit element formulering: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$(FEM) \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 Uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Nu (VF)-(FEM) ger <u>Galerkin ortogonalitet:</u>

$$(G\perp) \qquad \int_0^1 (u-U)'v'\,dx + \int_0^1 (u-U)v\,dx = 0, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Relevant norm för uppskattning av felet $e = u - U$, blir då energinormen:

$$\|e\|_E := \Big(\int_0^1 (e')^2\,dx + \int_0^1 e^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Då har vi med $v \in V_h^0$ att

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 =& \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v+v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v+v-U)\,dx \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
& + \int_0^1 (u-U)'(v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(v-U)\,dx \{\text{denna rad } = 0 \text{ pga } G\perp\} \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
\le& \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \le \|(u-U)'\|\|(u-v)'\| + \|u-U\|\|u-v\| \\
\le& \frac{1}{2}\|(u-U)'\|^2 + \frac{1}{2}\|(u-v)'\|^2 + \frac{1}{2}\|u-U\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

Alltså

$$\|e\|_E^2 = \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \le \|(u-v)'\|^2 + \|u-v\|^2, \quad \forall v \in V_h^0.$$

Välj nu $v = \pi_h u$. $\pi_h u$ är den linjära interpolanten av u. Genom att använda feluppskattningar för interpolanten får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &\le \|(u-\pi_h u)'\|^2 + \|u-\pi_h u\|^2 \\
&\le C_i^2\|hu''\|^2 + C_i^2\|hu'\|^2 \le \Big(C_i\|hu''\| + C_i\|hu'\|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Alltså vi har följande a priori feluppskattning:

$$\|e\|_E \le C_i\Big(\|hu''\| + \|hu'\|\Big) = \mathcal{O}(h).$$

6. Insättning av variabelseparationen $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i differentialekvationen ger att (se Lecture Notes in Fourier analys: Variabelseparation; Exempel 1 med $L = 1$ och $f(x) = x(1-x)$)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = \lambda < 0.$$

med randdata får vi $\lambda = -(n\pi)^2 < 0, \ \ n = 1, 2, \ldots$ och

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin(n\pi x), \quad T(t) = T_n = T(0)e^{-kn^2\pi^2 t}.$$

Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-kn^2\pi^2 t} \sin n\pi x,$$

med

$$\begin{aligned}
C_n &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx = [PI] \\
&= 2\Big[x(1-x)\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 (1-2x)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx \\
&= 2\Big[(1-2x)\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 (-2)\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} \\
&= 4\Big[\frac{-\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3}\Big]_0^1 = 4\frac{[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}.
\end{aligned}$$

Alltså endast udda n ger koefficienter som är skilda från noll, och vi får lösningen:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-k(2n+1)^2\pi^2 t} \sin(2n+1)\pi x.$$

7. Se “Lecture TMA682 Notes”.

MA