TMA682, Teorifrågor inför tentamen

1. Formulera och bevisa "andra shift-lagen" för Laplacetransformer:

$$\mathcal{L}[f(t-T)\theta(t-T)] = e^{-Ts}F(s).$$

2. Verifiera följande Laplacetransformer

$$\begin{array}{ll} a) & \mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0), \\ b) & \mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{array}$$

3. Visa att om funktionen F är periodik med perioden P, så är

$$\int_a^{a+P} F(x)\,dx$$

oberoende av a.

4. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion. Visa att om

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

så är

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

5. Visa att om funktionen f är 2π-periodisk och Riemann integrerbar på $[-\pi, \pi]$. C_n är de komplexa Fourierkoefficienterna till f. Då är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta, \qquad \text{(Bessel's olikhet)}.$$

6. Formulera och bevis *Riemann-Lebesgue Lemma.*

7. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$. Visa att det finns interpolationskonstant C_i, oberoede av f och intervallet (a, b), så att för linjär interpolantion $\Pi_1 f$ har vi följande feluppskattningen:

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \leq C_i (b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)}$$

8. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad (RV). \end{cases}$$

Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (PDE)+(RV) i energinormen: Dvs visa att $\forall v \in V_h^0$,

$$||(u-U)'||_a \leq ||(u-v)'||_a \leq C_i ||hu''||_a, \qquad ||w||_a = \Big(\int_0^1 aw^2\, dx\Big)^{1/2},$$

med $V_h^0 :=$ {styckvis linjära kontinuerliga v med $v(0) = v(1) = 0$}.

9. Betrakta randvärdesproblemet

$$(BVP) \qquad \begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad (RV). \end{cases}$$

Ange en variationsformulering (VF) och en minimeringsproblem (MP) för (BVP) och visa att

$$(VF) \Longleftrightarrow (MP).$$

10. Formulera och Bevisa Poincares olikhet.

11. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f(x), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsolikheter:

$$a) \qquad ||u(\cdot, t)|| \leq ||u_0|| + \int_0^t ||f(\cdot, s)||\, ds,$$

$$b) \qquad ||u_x(\cdot, t)||^2 \leq ||u_0'||^2 + \int_0^t ||f(\cdot, s)||^2\, ds.$$

12. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsolikheter:

$$\begin{aligned} &(a). \qquad \frac{d}{dt}||u||^2 + 2||u'||^2 = 0. \\ &(b). \qquad ||u(\cdot,t)|| \le e^{-t}||u_0||. \end{aligned}$$

13. Betrakta följande, 1-dimensionell, vågekvation:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Visa att den totala energin är konstant (konservering av energin). Dvs, visa att

$$\frac{1}{2}||\dot{u}||^2 + \frac{1}{2}||u'||^2 = \text{konstant}.$$