TILLÄMPAD MATEMATIK FÖR K OCH BT, 2017
STUDIO I

1. FEM för konvektion–diffusionsproblem.

Vi skall härleda den kontinuerliga, linjära finita elementmetoden, cG(1), för randvärdesproblem i en dimension. Proceduren leder till ett linjärt ekvationssystem av typen $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$. Här är A en koefficientmatris, $\boldsymbol{\xi}$ en vektor med värden på den approximativa lösningen i vissa noder, och $\mathbf{b}$ kallas för lastvektor och innehåller bidragen från eventuell källa och randtermer i differentialekvationen. Mer specifikt ska vi här utvidga beskrivningen av metoden för den stationära värmeledningsekvationen i Kapitel 4.3, till fallet som också innehåller en *konvektionsterm*. Till att börja med betraktar vi randvärdesproblem med homogena Dirichletrandvillkor. Vi illustrerar proceduren för en konkret problem nedan.

Problem: Betrakta det stationära konvektion-diffusionsproblemet

$$\begin{aligned} &-Du''(x) + \frac{1}{2}u'(x) = 1, \quad 0 < x < \pi, \\ &u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

där D är en positiv konstant (diffusionskonstant). Använd en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, \pi]$ till n delintervall (med längd $h = \pi/n$) och bestäm koefficientmatrisen A och lastvektorn $\mathbf{b}$ för cG(1)-approximationen av problemet (1).

(Se också Welty et al, Fundamentals of Momentum, Heat and Mass transfer (6th ed.), ekvation (23-21) i en rumsdimension, med $v = 1/2$ och $R_A = 1$).

Lösning: Vi vill konstruera en approximativ lösning u_h i ett ändligdimensionellt rum av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på partitionen $\mathcal{T}_h$.

Målet är att härleda ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$, för de obekanta nodvärdena $\xi_j = u_h(x_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$, där $\{x_j = jh\}$ är noderna i partitionen $\mathcal{T}_h$. (Notera att $\xi_0 = \xi_n = 0$ är givna randdata.)

Både den kontinuerliga lösningen och testfunktioner är i Hilbertrummet

$$V^0 := H_0^1 = \left\{ w : \int_0^\pi \Big(w(x)^2 + w'(x)^2 \Big)\, dx < \infty, \quad w(0) = w(\pi) = 0 \right\}.$$

För att ta fram en *variationsformulering* multiplicerar vi ekvationen med en testfunktion $v \in V^0$ och integrerar över $(0, \pi)$. Efter partiell integration i första integralen får vi

$$-Du'(\pi)v(\pi) + Du'(0)v(0) + D\int_0^\pi u'v'\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi u'v\, dx = \int_0^\pi v\, dx.$$

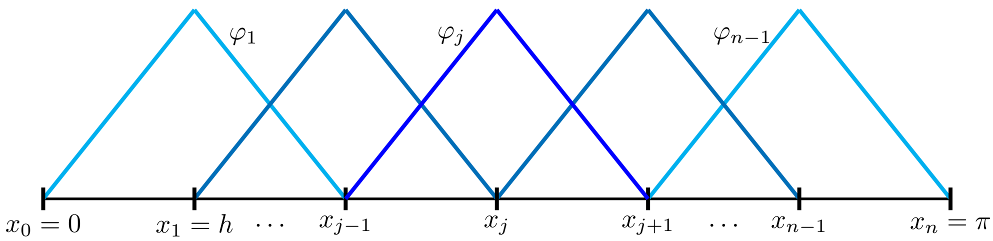
Då $v(0) = v(\pi) = 0$ ger detta följande variationsformulering:

(VF) Finn $u \in V^0$ så att $D \int_0^\pi u'v'\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi u'v\,dx = \int_0^\pi v\,dx, \quad \forall v \in V^0.$

För att kunna lösa problemet med hjälp av datorn söker vi approximativa lösningar i ett ändligdimensionellt funktionsrum. I cG(1)-metoden söker vi styckvis linjära lösningar U i rummet

$$V_h^0 := \{\varphi \in V^0 : \varphi \text{ är kontinuerlig, styckvis linjär på partitionen } \mathcal{T}_h\}.$$

Rummet V_h^0 kan beskrivas med hjälp av basfunktioner φ_j, för $j = 1, \dots, n-1$, det vill säga alla *fullständiga hattfunktioner* φ_j som är skilda från noll på $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, för $j = 1, \dots, n-1$, se Figur 1. (Observera att eftersom $V_h^0 \subset V^0$ gäller att $U(0) = U(\pi) = 0$, därför behövs inga basfunktioner i noderna $x_0 = 0$, respektive $x_n = \pi$).



FIGUR 1. Basfunktioner (hattfunktioner) φ_j i partitionen $\mathcal{T}_h$.

Hattfunktionerna kan skrivas

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_{j+1} - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 1, \dots, n-1$$

Finita elementformuleringen (den diskreta variationsformuleringen) är:

(FEM)

Finn $U \in V_h^0$ så att $D \int_0^\pi U'\varphi'\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi U'\varphi\,dx = \int_0^\pi \varphi\,dx, \quad \forall \varphi \in V_h^0.$

Eftersom $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n-1}$ är en bas för V_h^0 kan vi skriva $U(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j(x)$, med några koefficienter (koordinater) ξ_j.

Genom att sätta in U in i (FEM), och välja $\varphi = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n-1$ får vi

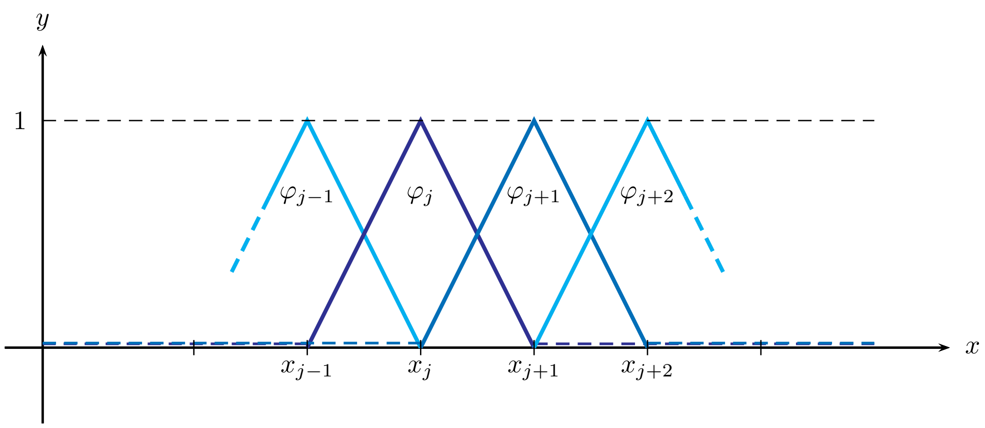
$$\sum_{j=1}^{n-1} \Big(D \int_0^\pi \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi_j'(x)\varphi_i(x)\,dx\Big)\xi_j = \int_0^\pi \varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

dvs $n-1$ ekvationer (för $i = 1, \dots, n-1$) och $n-1$ obekanta $\{\xi_j\}_{j=1}^{n-1}$.

På matrisform svarar detta mot $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$ med $A = DS + \frac{1}{2}C$, där S $(= A_{\text{unif}})$ är styvhetsmatrisen som redan har beräknats, se Kapitel 4 i kursboken,

$$S = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

För att beräkna elementen i konvektionsmatrisen C inser vi, som tidigare, att endast c_{ij} med $|i-j| \leq 1$ kommer att ge bidrag (vilket resulterar i en tridiagonal matris), se Figur 2.



Figur 2. φ_j överlappar bara med sig själv, φ_{j-1} och φ_{j+1}.

Elementen i den *anti-symmetriska konvektionsmatrisen* C,

$$c_{ij} = \int_0^\pi \varphi_j'(x)\varphi_i(x)\,dx,$$

kan lätt beräknas genom att beräkna integralerna

$$(2) \qquad \begin{cases} c_{ij} = 0, & \text{för} \quad |i-j| > 1 \\ c_{ii} = \int_0^\pi \varphi_i(x)\varphi_i'(x)\,dx = 0, & \text{för} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ c_{i,i+1} = \int_0^\pi \varphi_i(x)\varphi_{i+1}'(x)\,dx = 1/2, & \text{för} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ c_{i+1,i} = \int_0^\pi \varphi_{i+1}(x)\varphi_i'(x)\,dx = -1/2, & \text{för} \quad i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Se även kapitel 7.4 i kursboken.

Slutligen beräknas lastvektorn $\mathbf{b}$:s element b_i som

$$b_i = \int_0^{\pi} \varphi_i(x)\,dx = \{\text{arean under basfunktionen } \varphi_i\} = \frac{2h \cdot 1}{2} = h, \quad i = 1, \ldots, n{-}1.$$

Alltså har vi

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Uppgifter

(a) Implementera finita elementmetoden för problem (1), som beskrivs ovan, i Matlab. Det vill säga, skriv en funktionsfil (eller skriptfil) som, givet en diffusivitet D och en steglängd h (eller antal delintervall n), beräknar lösningsvektorn $\boldsymbol{\xi}$ genom att lösa $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$.

Tips: På kursidan i PingPong finns en mall för Matlab-filen som ni kan använda som utgångspunkt.

(b) Pécletttalet Pe (som studeras i kursen i transportprocesser) definieras som kvoten mellan konvektiv och diffusiv transport, det vill säga här (med konvektionshastigheten $v = 1/2$ och intervall-längden π)

$$\mathrm{Pe} = \frac{\text{konvektion}}{\text{diffusion}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{D} \propto \frac{1}{D}.$$

Studera, genom att jämföra finita elementapproximationen med den exakta lösningen till (1) (den senare kan beräknas för hand), vilken steglängd h som krävs för att få en bra noggrannhet i finita element approximationen i två fall:

Fall 1: $\mathrm{Pe} \approx 1$, alltså $D \approx 1$.

Fall 2: $\mathrm{Pe} \gg 1$, alltså $D \ll 1$ (konvektionsdominerat).

Redovisa resultaten grafiskt!

Tips: Att plotta styckvis linjära finita elementapproximationer i Matlab är mycket enkelt, eftersom $U(x_j) = \xi_j$ och Matlab ritar räta linjer mellan nodvärden automatiskt, men glöm inte randdata $U(0) = U(\pi) = 0$!