TMA683 TILLÄMPAD MATEMATIK FÖR K OCH BT, 2017
STUDIO II

1. Problembeskrivning

Denna uppgift går ut på att studera finita elementlösningar för *värmeledningsproblemet*

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{u}(x,t) - \alpha u''(x,t) = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u'(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

Här är $u(x,t)$ en okänd temperaturfördelning och $f(x,t)$ och $u_0(x)$ är given källterm, respektive given begynnelsetemperaturfördelning. α är värmeledningskoefficienten, som vi i det följande sätter till 1. (Jämför ekvationen med ekvation (15-17) i Welty et al, Fundamentals of Momentum, Heat and Mass transfer (6th ed.))

Notera Neumann-randvillkoret för $x = 0$ och det homogena Dirichlet-randvillkoret för $x = 1$.

2. Variationsformulering

För att få en numerisk metod för att beräkna en approximativ lösning börjar vi med att ta fram en variationsformulering. Vi väljer ett testfunktions-rum $V = \{w : [0,1] \to \mathbb{R} : \|w\|^2 + \|w'\|^2 < \infty \text{ och } w(1) = 0\}$, där randvillkoren svarar mot ekvationens randvillkor, dvs inget villkor på testfunktionerna i $x = 0$ där vi har ett Neumann-randvillkor. Vi multiplicerar (1) med en testfunktion $v \in V$ och integrerar över $x \in (0,1)$,

$$(2)\qquad \int_0^1 \dot{u}(x,t)v(x)\,dx - \int_0^1 u''(x,t)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)\,dx$$

Vi partialintegrerar i första integralen i (2) och får

$$(3)\qquad \int_0^1 \dot{u}(x,t)v(x)\,dx - [u'(x,t)v(x)]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u'(x,t)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)\,dx.$$

Eftersom $v(1) = 0$ och $u'(0,t) = 0$, får vi

$$(4)\qquad \int_0^1 \dot{u}(x,t)v(x)\,dx + \int_0^1 u'(x,t)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)\,dx.$$

Därför har vi följande variationsformulering för (1): För varje fixt $t \in (0,T]$, finn $u(\cdot,t) \in V$ så att (4) uppfylls för varje $v \in V$.

Notera att vi har gjort en variationsformulering enbart i rumsvariabeln x. Tiden t betraktas här som en fix parameter.

3. Rumsdiskretisering

Som i Studio I använder vi variationsformuleringen för att göra en rumsdiskretisering. Vi betraktar en partition $\mathcal{T}_h : jh, j = 0, 1, \ldots, n-1$ av intervallet $0 \le x \le 1$ in i n delintervall av samma längd $h = 1/n$ och väljer V_h som det underrum till V som består av kontinuerliga funktioner som är styckvis linjära på partitionen $\mathcal{T}_h$. Vi får finita elementformuleringen: För varje fixt $t \in (0, T]$, finn $U(\cdot, t) \in V_h$ så att

$$\int_0^1 \dot{U}(x,t)\varphi(x)\,dx + \int_0^1 U(x,t)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 f(x,t)\varphi(x)\,dx \tag{5}$$

för alla $\varphi \in V_h$.

Låt $\{\varphi_j\}_{j=0}^{n-1}$ vara standardbasen för V_h (det vill säga de vanliga hattfunktionerna; φ_n inkluderas ej här eftersom $U(1,t) = 0$). Vi kan då skriva U som

$$U(x,t) = \xi_0(t)\varphi_0(x) + \xi_2(t)\varphi_2(x) + \ldots + \xi_{n-1}(t)\varphi_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(t)\varphi_j(x). \tag{6}$$

Observera att koefficienterna $\xi_j(t)$ är tidsberoende funktioner, men inte rumsberoende.

Insättning av (6) i (5) och med testfunktioner $\varphi = \varphi_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ ger

$$\int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \dot{\xi}_j(t)\varphi_j(x)\Big)\varphi_i(x)\,dx + \int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(t)\varphi_j'(x)\Big)\varphi_i'(x)\,dx = \int_0^1 f(x,t)\varphi_i(x)\,dx$$

för $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

En omskrivning ger

$$\sum_{j=0}^{n-1} \dot{\xi}_j(t)\Big(\int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx\Big) + \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(t)\Big(\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx\Big) = \int_0^1 f(x,t)\varphi_i(x)\,dx$$

vilket är ett system av n st ordinära differentialekvationer (för $i = 0, \ldots, n-1$) för n st obekanta funktioner $\{\xi_j(t)\}_{j=0}^{n-1}$. På matrisform kan detta skrivas

$$M\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + S\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{F}(t). \tag{7}$$

Här är $\boldsymbol{\xi}(t)$ en vektor som innehåller nodvärdena $\xi_j(t)$ för $U(x,t)$.

Matriselementen för massmatrisen M och styvhetsmatrisen S är givna enligt

$$m_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \quad s_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx, \qquad i,j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

som vi redan beräknat (se kursboken, kapitel 7.4) och element för lastvektorn $\mathbf{F}(t)$ är

$$F_i(t) = \int_0^1 f(x,t)\varphi_i(x)\,dx, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

4. Tidsdiskretisering

För att tillämpa finita elementmetoden ovan, återstår det att lösa det *semidiskreta* (diskretiserat i x) problemet $M\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + S\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{F}(t)$. Vi introducerar en partition $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T$ av $[0, T]$ till m delintervall av samma längd $k = T/m$ (så att $t_\ell = \ell k,\ \ell = 0, \ldots, m$) och approximerar tidsderivatan $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ med en differenskvot enligt

$$M\frac{\boldsymbol{\xi}^{(\ell)} - \boldsymbol{\xi}^{(\ell-1)}}{k} + S\boldsymbol{\xi}^{(\ell)} = \mathbf{F}(t_\ell), \qquad \ell = 1, \ldots, m \tag{10}$$

där $\boldsymbol{\xi}^{(\ell)} \approx \boldsymbol{\xi}(t_\ell)$ för $\ell = 0, \ldots, m$. Omarrangering av termer ger följande iterativa schema

$$(M + kS)\boldsymbol{\xi}^{(\ell)} = M\boldsymbol{\xi}^{(\ell-1)} + k\mathbf{F}(t_\ell), \tag{11}$$

som är också känd som *Eulers bakåtmetod*[1]. Det finns olika val för data $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$, men det enklaste valet är den linjära interpolanten av $u_0(x)$, det vill säga $\xi_j^{(0)} = u_0(x_j),\ j = 0, \ldots, n-1$. Man kan använda olika kvadraturregler för att beräkna elementen $F_i(t_\ell)$. Med andra ord startar man med initial data och en kvadratur för $F_i(t_\ell)$, så beräknar man successivt approximationer $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, …, $\boldsymbol{\xi}^{(m)}$ genom att använda schemat (11).

5. Uppgifter

a) Implementera schemat (11) för lösning av värmeledningsekvationen. För att validera koden, dvs kontrollera att ni gjort rätt, kan ni jämföra med lösningarna som plottats i figur F.1 och F.7 i appendix F i Welty et al, Fundamentals of Momentum, Heat and Mass transfer (6th ed.). Se även ekvation (17-7) på sid 259 och avsnitt 17.2 i Welty et al.

Notera att Neumann-villkoret i (1) motsvarar att vi löser problemet i en halv platta och speglar lösningen till den andra halvan. Dirichlet-villkoret motsvarar att $h \to \infty$ med Weltys beteckningar. Om vi sätter $u_0(x) = 1$ och $f(x,t) = 0$ löser vi alltså precis problemet på sid 259 i Welty då $\alpha = 1$, $x_1 = 1$, $T_\infty = 0$, $T_0 = 1$ och $h \to \infty$. För att jämföra med figurerna gäller alltså att $m = 0$, $Y = U$, $X = t$ och $n = x$.

Använd er kod för att reproducera figurerna F.1 (långa tider) och F.7 (korta tider) för $m = 0$. Notera den logaritmiska skalan på y-axeln (använd Matlab-kommandot `semilogy` för att plotta). Prova med några olika rums- och tidssteg och se om det har effekt på lösningen.

Tips 1: Tänk igenom vad som behöver göras innan ni börjar koda!

Tips 2: På kursens sida i PingPong finns en mall för koden som ni kan utgå från.

[1]Man kan också använda andra Finita differensmetoder för tidsdiskretiseringen, se kapitel 8.2 i kursboken.

b) Välj nu källterm och begynnelsedata enligt följande

$$f(x,t) = \frac{10}{\sigma^2} \exp\left(-t - \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right),$$
$$u_0(x) = \cos\frac{\pi x}{2}.$$

Välj olika $\bar{x} \in (0,1)$, till exempel $\bar{x} = 1/4, 1/2$ och $\bar{x} = 3/4$, och ta $\sigma = 0.02$, $T = 2$ och lämpligt val av tidssteg. Visualisera resultatet (till exempel en `plot` för varje tidssteg, eller med hjälp av `surf`) och bedöm hur rimligt det verkar, i termer av värmeledning, i förhållande till begynnelsedata, källterm och randvillkor.

Tips: Man kan använda inbyggd kvadraturregel i Matlab (`quad` eller `trapz`) för beräkning av lastvektorn, eller skapa egen med de metoder vi lärt oss i kursen.