TMA683 TILLÄMPAD MATEMATIK
UPPGIFTER OM FINITA DIFFERENS-METODER FÖR BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

1. Härled en finita differens-metod (dvs härled uttrycket för approximationen $\tilde{u}(t+\Delta t)$ som funktion av $\tilde{u}(t)$) för differentialekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = \dfrac{1}{u(t)}, \quad 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

med

a) Explicit Euler-metoden

b) Implicit Euler-metoden

c) Crank Nicolson-metoden

Implementera gärna metoderna i Matlab och jämför med den exakta lösningen $u(t) = \sqrt{u_0^2 + 2t}$.

2. Visa genom att Taylor-utveckla propagatorn för ODE:n $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$, $u(0) = u_0$ för respektive metod att

a) Implicit Euler-metoden har trunkeringsfel av ordning $(\Delta t)^2$.

b) Crank Nicolson-metoden har trunkeringsfel av ordning $(\Delta t)^3$.

3. Visa att både implicit Euler-metoden och Crank-Nicolson-metoden är stabila för alla $\Delta t > 0$ för ODE:n $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ med $\lambda < 0$ och $u(0) = u_0$.

Svar

1. a) $\tilde{u}(t+\Delta t) = \tilde{u}(t) + \Delta t/\tilde{u}(t)$

   b) $\tilde{u}(t+\Delta t) = \frac{\tilde{u}(t)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{u}}{2}\right)^2 + \Delta t}$

   c) $\tilde{u}(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}(t) + \frac{\Delta t}{2\tilde{u}(t)}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\tilde{u}(t) + \frac{\Delta t}{2\tilde{u}(t)}\right)^2 + \frac{\Delta t}{2}}$

2. b) *Lösning:* Den exakta lösningen på intervallet $[0, \Delta t]$ är $u(t) = u_0 \exp(\lambda \Delta t)$, så propagatorn för den exakta lösningen är $P_0(\Delta t) = \exp(\lambda \Delta t)$.

   Propagatorn för Crank-Nicolson-metoden för den givna differentialekvationen är $P_{CN}(\Delta t) = \frac{1+\frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1-\frac{1}{2}\lambda\Delta t}$ (se ekvation (8.2.4) i boken, men notera att det är tryckfel så att $+$ och $-$ skall byta plats där).

   Taylor-utveckling av P_0 (med variabeln $\lambda\Delta t$) ger

   $$\exp(\lambda\Delta t) = 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\lambda\Delta t)^3 + \dots \tag{1}$$

   medan Taylor utveckling av nämnaren i P_{CN} ger

   $$\begin{aligned} \frac{1+\frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1-\frac{1}{2}\lambda\Delta t} &= \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t\right)\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t + (\frac{1}{2}\lambda\Delta t)^2 + (\frac{1}{2}\lambda\Delta t)^3 + \dots\right) \\ &= 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \frac{1}{4}(\lambda\Delta t)^3 + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

   Om vi jämför (2) med (1) ser vi att utvecklingarna är lika till och med ordning $(\Delta t)^2$, vilket innebär att skillnaden, dvs trunkeringsfelet, är av ordning $(\Delta t)^3$.

3. *Ledning:* Visa att $|P(\Delta t)| < 1$ för alla $\Delta t > 0$, där $P(\Delta t)$ är propagatorn för respektive metod. Kom ihåg att $\lambda < 0$.