TMA683 TILLÄMPAD MATEMATIK
UPPGIFTER OM LINJÄRA RUM, SKALÄRPRODUKT OCH L_p-NORMER

1. Betrakta de delmängder av $\mathcal{P}^{(q)}(0,1)$ som består av alla polynom $p(t)$ av grad $\leq q$ sådana att
   a) $2p(0) = p(1)$
   b) $p(t) \geq 0$
   c) $p(t) = p(1-t)$ för alla t.
   Vilka av dessa delmängder är underrum i $\mathcal{P}^{(q)}(0,1)$?

2. Visa att $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ är en bas för $\mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{R})$ då
   a) $p_1(t) = (t+1)^2,\ p_2(t) = (t+2)^2,\ p_3(t) = (t+3)^2$
   b) $p_1(t) = \frac{1}{2}(t-2)(t-3),\ p_2(t) = -(t-1)(t-3),\ p_3(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$
   Ange också koordinaterna för polynomet t^2 i basen $\{p_1, p_2, p_3\}$.

3. Visa att följande funktioner är linjärt beroende (för $t \in \mathbb{R}$):
   a) $\sin 2t,\ \cos 2t,\ \sin^2 t,\ \cos^2 t$
   b) $\ln(t^6+1),\ \ln(t^4-t^2+1),\ \ln(t^2+1)$

4. Visa att följande funktioner är linjärt oberoende (för $t \in \mathbb{R}$):
   a) $\sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t$
   b) $e^t,\ e^{t^2},\ e^{t^3}$

5. Undersök om mängden $\{1+t^3, 3+t-2t^2, -t+3t^2-t^3\}$ är linjärt beroende i $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$. Kan elementen utgöra en bas för $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$?

6. De fyra första s.k. Hermite-polynomen är $\{1, 2t, -2+4t^2, -12t+8t^3\}$. Visa att de är linjärt oberoende i $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$ och bestäm koordinaterna för $p(t) = 7-12t-8t^2+12t^3$ i denna bas.

7. Vi definierar skalärprodukt och L_2-norm för två funktioner f och g på ett intervall (a,b) enligt $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ resp. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. I analogi med vektorer i $\mathbb{R}^n$ definierar vi "vinkeln" θ mellan f och g genom

$$\langle f, g\rangle = \|f\|\|g\|\cos\theta.$$

   Vad är cosinus för "vinkeln" mellan funktionerna $f(x) = 3x+1$ och $g(x) = 5x^2+3$ på intervallet $(-1,1)$?

8. Visa att $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x \cos x} dx \leq 1$.

9. Visa att i $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

är funktionerna $\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx\}$ sinsemellan ortogonala.
(Detta är fundamentalt i teorin för Fourierserier.)

10. För vilka värden på a är funktionerna $1 + at^2$ och $4t - a$ ortogonala i $\mathcal{P}^{(2)}(0, 1)$?

11. Kan någon av följande två kandidater vara en skalärprodukt på $\mathcal{C}^1[a, b]$?
a) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$
b) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$,

12. Låt $V = \mathcal{C}[0, 1]$, dvs det linjära rummet som består av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 1]$. För f och g i V definierar vi skalärprodukten av f och g som

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

och L_p-normen för $p = 1, 2, \infty$ som

$$\|f\|_{L_p(0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \ p = 1, 2$$

och

$$\|f\|_{L_\infty(0,1)} = \max_{x \in [0,1]} |w(x)|.$$

Bestäm $\langle f, g \rangle$, $\|f\|_{L_p(0,1)}$ och $\|g\|_{L_p(0,1)}$ för $p = 1, 2, \infty$ i följande fall:
a) $f(x) = 1 + x,\ g(x) = 2 - x$
b) $f(x) = 1,\ g(x) = 3$
c) $f(x) = \frac{1}{2},\ g(x) = 3 + 2x$
d) $f(x) = 3x,\ g(x) = -4x^2$
e) $f(x) = x,\ g(x) = e^x$
f) $f(x) = 1,\ g(x) = \cos x + \sin x$

Svar

1. a) och c)
2. a) Koordinater för t^2 är $(3, -3, 1)$.
   b) Koordinater för t^2 är $(1, 4, 9)$.
3. *Ledning:* a) Använd trigonometriska formler; b) faktorisera $t^6 + 1$
4. *Ledning:* Sätt linjärkombinationen $= 0$ (för alla t). Gör intelligenta val av t som ger ett ekvationssystem för koefficienterna med endast noll-lösning.
5. De är linjärt oberoende men kan ej utgöra en bas, ty dimensionen av $\mathcal{P}_3$ är 4 (och det räcker alltså inte med 3 basvektorer för att spänna rummet).
6. Koordinaterna är $(3, 3, -2, 3/2)$.
7. $\cos\theta = \frac{7}{6\sqrt{6}}$
8. *Ledning:* Använd Cauchy-Schwarz olikhet.
9. *Ledning:* Använd trigonometriska formler, alt. partialintegrera två gånger.
10. $a = \pm\sqrt{6}$
11. b) men ej a).
12.

	$\|f\|_{L_1}$	$\|f\|_{L_2}$	$\|f\|_{L_\infty}$	$\|g\|_{L_1}$	$\|g\|_{L_2}$	$\|g\|_{L_\infty}$	$\langle f, g\rangle$
a)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	2	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	2	$\frac{13}{6}$
b)	1	1	1	3	3	3	3
c)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{7}{\sqrt{3}}$	5	2
d)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	4	-3
e)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$e-1$	$\sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}$	e	1
f)	1	1	1	$1+\sin 1-\cos 1$	$\sqrt{\frac{1}{2}(3-\cos 2)}$	$\sqrt{2}$	$1+\sin 1-\cos 1$