системы равен m, с помощью квадратных матриц

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \dots i_n}} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, N, \qquad \sum_{k=1}^{n} i_k = m,$$

составим форму порядка Nm

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det \sum_{i_1 \dots i_n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \dots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} i_k = m, \tag{8}$$

относительно действительных скалярных параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Деление по типам системы (1) происходит по характеру формы (8) точно так же, как это было сделано выше при рассмотрении одного уравнения порядка m.

Определить тип следующих уравнений:

25. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$.

26. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$.

27. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0$.

28. $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$.

29. $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$.

30. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0$.

31. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0$.

32. $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} - 3x^2 u_y + y \sin x \, u + xe^{-y} = 0$.

33. $5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz^2 \sin x = 0$.

34. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_z - u = 0$.

35. $3u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u_x - u_y + xye^z = 0$.

36. $y^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$, m — целое неотрицательное число.

37. $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0$.

Вдоль соответствующих решений $u(x, y)$ определить тип следующих уравнений:

38. $u_{xx}^2 + (u_{xx} - 2) u_{xy} - u_{yy}^2 = 0$, $\quad u = x^2 + y^2$.

39. $u_{xy}^2 + u_{xx} u_{yy} + u_{yy}^2 = 8$, $\quad u = x^2 + y^2$, $\quad u = 2\sqrt{2}\, xy$.

40. $u_{xx}^2 - 4u_{xy} + u_{yy}^2 = 0$, $\quad u = (x+y)^2$, $\quad u = x$, $\quad u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{17}{16} xy$.

41. $u_{xx} + u_{xy} u_{yy} + u_{yy}^2 - 4u_{yy} = 0$, $\quad u = 2y^2$, $\quad u = 5xy$, $\quad u = x$.

42. $3u_{xx}^3 - 6u_{xy} + u_{yy} - 4 = 0$, $\quad u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $\quad u = 2y^2$.

43. $u_{xx}^2 u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - 2(x+y) - 8 = 0$, $\quad u = x^2 + 2xy$.

44. $u_{xx}^4 + 2u_{xy}^2 - 3u_{yy} + u_y - 2x = 0$, $\quad u = 2xy - 8y$.

45. $2u_{xx}^3 + 2u_{xy}^5 + 3u_{yy} - 2u_y + 2x = 0$, $\quad u = xy - \frac{1}{2} x^2$.

46. $5u_{xx}^5 - 7u_{xy} + 25u_{yy} - 150y = 0$, $\quad u = \frac{x^2}{2} + y^3 + \frac{5}{7} xy$.

47. $u_{xx}^2 + 5u_{xy}^2 + 6u_{yy}^2 = 12$, $\quad u = \frac{1}{2}(x+y)^2$, $\quad u = \sqrt{3}\, x^2$.

48. $u_{xx}^3-4u_{xy}^2+7u_{yy}-4u_x+u_y+3x+4y+3=0,\ u=\frac{1}{2}x^2+xy.$

49. $u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_{yy}^2+2u_x-2(x+y)=0, \quad u=\frac{1}{2}(x+y)^2.$

50. $u_{xy}^2+u_{xx}u_{yy}+u_{yy}^2+2u_{xx}+2u_{yy}=0, \quad u=x^2-y^2, \quad u=x.$

51. Написать условия эллиптичности, параболичности и гиперболичности уравнения

$$F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy})=0,$$

если известно, что функция F непрерывно дифференцируема относительно последних трех переменных, причем по крайней мере одна из производных по этим переменным отлична от нуля.

Определить тип следующих систем уравнений:

52. $2u_x+3u_y-3v_y+u=0,$
$-u_x+u_y+v_x+xy=0.$

53. $2u_x+3v_y+3u_y-6u=0,$
$u_x+u_y+v_x+x^2u=0.$

54. $2u_x+3v_y+3u_y-2u=0,$
$u_x+v_x-u+xy^2=0.$

55. $2u_x-4v_x+3u_y+8v_y-u=0,$
$3u_x-2v_x+6u_y+3v_y+2u=0.$

56. $2u_x+v_x+12u_y-2u=0,$
$v_x+4u_y+v_y+xy=0.$

57. $2u_x+v_x+7u_y-2u=0,$
$3u_x+3v_x+31u_y+v_y-e^y\sin x=0.$

58. $5u_x+22{,}5v_x+2u_y+v_y-6u=0,$
$5v_x+2u_y+3v_y-2xu=0.$

59. $v_x+12u_y+v_y+3u-32xe^y=0,$
$-5u_x+\frac{5}{6}v_x+u_y+v_y-e^xu=0.$

60. $15u_x+9v_x+12u_y+17v_y-3x\cos y=0,$
$3u_x+2v_x+v_y-6u=0.$

61. $3u_x+3v_x+3u_y+4v_y=0,$
$2u_x+3v_x-v_y-3u=0.$

62. $u_x-v_y+2u_z-3v_z-u=0,$
$u_y+2v_x-2u_z+v_y+2u=0.$

63. $u_x-u_y+2v_y-3v_z+2u=0,$
$u_x+2u_z-v_x+v_z-u=0.$

64. $u_x+u_y+v_y+v_z-xyu=0,$
$v_x-u_y-v_y+u_z+2u=0.$

Определить тип следующих систем уравнений в зависимости от значения параметра k:

65. $u_x - kv_y = 0,$
$u_y + v_x = 0.$

66. $u_y - kv_x + v_y = 0,$
$u_x + kv_y - u = 0.$

67. $u_y - kv_x + kv_y = 0,$
$u_x + v_y + 2v = 0.$

§ 3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

Общее линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными можно записать в виде

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \qquad (9)$$

где a, b, c, d, e, f, g — заданные функции независимых переменных x, y.

Обозначим через Δ дискриминант $b^2 - ac$ соответствующей (9) квадратичной формы

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2. \qquad (10)$$

Кривые, определяемые уравнением $\Omega(x, y) = \text{const}$, где Ω — решение нелинейного уравнения с частными производными первого порядка

$$a\Omega_x^2 + 2b\Omega_x\Omega_y + c\Omega_y^2 = 0,$$

называются *характеристиками* уравнения (9). Компоненты касательного вектора (dy, dx) характеристической кривой в каждой ее точке (x, y) удовлетворяют равенству

$$a\,dy^2 - 2b\,dy\,dx + c\,dx^2 = 0. \qquad (11)$$

По введенной выше классификации уравнение (9) является эллиптическим, гиперболическим или параболическим в зависимости от того, будет ли форма (10) [или форма (11)] определена (дефинитна), знакопеременна или полуопределена (вырождена), т. е. дискриминант $b^2 - ac = \Delta$ этой формы будет меньше нуля, больше нуля или равен нулю соответственно.

В эллиптическом случае уравнение (9) можно привести к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0 \qquad (12)$$

в результате замены независимых переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \qquad (13)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$a\varphi_x + b\varphi_y + \sqrt{-\Delta}\,\psi_y = 0, \quad a\psi_x + b\psi_y - \sqrt{-\Delta}\,\varphi_y = 0$$

с отличным от нуля якобианом $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$.

Замена (13), когда $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$a\varphi_x + (b + \sqrt{\Delta})\,\varphi_y = 0, \quad a\psi_x + (b - \sqrt{\Delta})\,\psi_y = 0,$$

приводит уравнение (9) в гиперболическом случае к виду

$$v_{\xi\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0. \tag{14}$$

Новая замена $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ позволяет привести уравнение (14) к каноническому виду

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + d_2 w_\alpha + e_2 w_\beta + f_2 w + g_2 = 0. \tag{15}$$

Наконец, в случае, когда уравнение (9) параболично, в результате замены (13), где $\varphi(x, y)$ — отличное от постоянной решение уравнения

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0,$$

а $\psi(x, y)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \neq 0,$$

получаем

$$v_{\eta\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0. \tag{16}$$

В уравнениях (12), (14), (16) $v(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$, где $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ — решения системы (13). Разрешимость этой системы по крайней мере «в малом» гарантирована выполнением условия

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Как известно из теории линейных уравнений с частными производными первого порядка, в качестве функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ в преобразовании (13) при $\Delta > 0$ можно брать левые части общих интегралов $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ обыкновенных дифференциальных уравнений, соответственно

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b - \sqrt{\Delta}},$$

а в качестве функции $\varphi(x, y)$ при $\Delta = 0$ — левую часть общего интеграла $\varphi(x, y) = \text{const}$ уравнения

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Что касается случая $\Delta < 0$, то, поскольку в записи

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \Omega(x, y)$$

функция Ω является решением уравнения

$$a\Omega_x + (b + i\sqrt{-\Delta})\,\Omega_y = 0,$$

преобразование (13) аналогично находим и на этот раз.

По изложенной схеме приводится к каноническому виду и квазилинейное уравнение вида

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

коэффициенты a, b, c которого являются заданными функциями лишь независимых переменных x, y.

Поскольку функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в преобразовании (13) являются решениями линейных уравнений с частными производными первого порядка, коэффициенты которых выражаются через $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, то от последних следует потребовать, чтобы они одновременно в нуль не обращались и, кроме того, обладали определенными дифференциальными свойствами.

Заметим, что, когда коэффициенты уравнения (9) постоянны, после приведения этого уравнения к одному из видов (12), (15), (16) можно произвести дальнейшее упрощение. Так, например, вводя новую неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$ по формуле

$$v(\xi, \eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}w(\xi, \eta),$$

подходящим подбором постоянных λ и μ можно добиться, чтобы коэффициенты при первых производных w в эллиптическом и гиперболическом случаях и один из коэффициентов при первых производных и коэффициент при самой w в параболическом случае отсутствовали.

Следующие уравнения привести к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

68. $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0.$

69. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0.$

70. $2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y-2u=0.$

71. $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0.$

72. $9u_{xx}-6u_{xy}+u_{yy}+10u_x-15u_y-50u+x-2y=0.$

73. $u_{xx}+4u_{xy}+10u_{yy}-24u_x+42u_y+2(x+y)=0.$

74. $u_{xx}+4u_{xy}+13u_{yy}+3u_x+24u_y-9u+9(x+y)=0.$

75. $(1+x^2)^2u_{xx}+u_{yy}+2x(1+x^2)u_x=0.$

76. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0.$

77. $u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0.$

78. $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y-2u=0.$

79. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}-2yu_x+ye^{y/x}=0.$

80. $xy^2u_{xx}-2x^2yu_{xy}+x^3u_{yy}-y^2u_x=0.$

81. $u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-\cos^2 x\,u_{yy}-\cos x\,u_y=0.$

82. $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}-xu=0.$

83. $u_{xx}-2xu_{xy}=0.$

84. $xu_{xx}+2xu_{xy}+(x-1)u_{yy}=0.$

85. $yu_{xx}+u_{yy}=0.$

86. $xu_{xx}+yu_{yy}+2u_x+2u_y=0.$

87. $u_{xx}+2\sin x\,u_{xy}-(\cos^2 x-\sin^2 x)u_{yy}+\cos x\,u_y=0.$

88. $u_{xx}+xyu_{yy}=0.$

Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнений:

89. $u_{xx}-4u_{xy}+5u_{yy}-3u_x+u_y+u=0.$

90. $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}-u_x+2u_y=0.$

91. $2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+u+x=0.$

92. $u_{xy}+2u_{yy}-u_x+4u_y+u=0.$

93. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_x+4u_y+u=0.$

94. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+3u_x-5u_y+4u=0.$

95. $u_{xx}-u_{yy}+u_x+u_y-4u=0.$

96. $u_{xy}+u_{xx}-u_y-10u+4x=0.$

97. $3u_{xx}+u_{xy}+3u_x+u_y-u+y=0.$

98. $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}-2u_x-2u_y+u=0.$

99. $5u_{xx}+16u_{xy}+16u_{yy}+24u_x+32u_y+64u=0.$

100. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}-3u_x+12u_y+27u=0.$

Привести к каноническому виду уравнения:

101. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}=0.$

102. $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}+3u_x=0.$

103. $u_{xy}+u_{xz}+u_{yz}-u_x+u_y=0.$

104. $3u_{xy}-2u_{xz}-u_{yz}-u=0.$

105. $u_{xx}+3u_{yy}+3u_{zz}-2u_{xy}-2u_{xz}-2u_{yz}-8u=0.$

106. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+6u_{xy}+2u_{xz}+2u_{yz}+2u_x+2u_y+2u_z+4u=0.$

107. $2u_{xx}+5u_{yy}+2u_{zz}-6u_{xy}-4u_{xz}+6u_{yz}-3u+y-2z=0.$

108. $3u_{yy}-2u_{xy}-2u_{yz}+4u=0.$

109. $u_{xx}+4u_{yy}+u_{zz}+4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yz}+2u=0.$

110. $u_{xx}+4u_{yy}+9u_{zz}+4u_{xy}+6u_{xz}+12u_{yz}-2u_x-4u_y-6u_z=0.$

§ 4. Математическое описание некоторых явлений, изучаемых методами математической физики

Во многих случаях исследование тех или иных явлений природы можно привести к нахождению решений дифференциальных уравнений с частными производными, носящих название *уравнений математической физики*. Чтобы пользоваться методами математической физики, в первую очередь следует установить, какие величины являются определяющими для изучаемого явления. Затем, пользуясь физическими законами (принципами), выражающими связь между этими величинами, составить уравнение (систему уравнений) с частными производными и дополнительные условия (граничные, начальные) к уравнению (системе), из которых впоследствии определяются и притом однозначно неизвестные величины, характеризующие явление. Важно иметь в виду, что одна и та же задача математической физики может служить моделью совершенно разных явлений.

Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Уравнения (системы) гиперболического типа получаются при математическом моделировании колебательных процессов. При выводе уравнений колебаний механических систем с успехом можно пользоваться *вариационным принципом стационарного действия* (известным также под названием *принципа наименьшего действия*) *Гамильтона*. В качестве примера рассмотрим плоские поперечные коле-