TMA690 2006-12-16

Partiella differentialekvationer. Lösningar.

1. a. Integrerar ekvationen

$$\int_D \Delta u \, dx = \int_D (1+u^3)\, dx$$

Greenformel:

$$0 = \int \frac{\partial u}{\partial \nu} dx = \int (1+u^3)\, dx > 0.$$

$\Rightarrow$ Det finns inte några lösningar.

b. $\Delta u = u^3 - 2u + 1$

Försöker med konstanter: $u = C$, $\Delta u = 0$.

$$C^3 - 2C + 1 = 0; \quad C^3 - C - (C-1) = 0$$

$$(C^2 + C - 1)(C-1) = 0,$$

$C_1 = 1$, $C_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ – 3 lösningar.

För Dirichletvillkoren konstanta lösningar finns inte.

Tyvärr var det tryckfel i del b: ekvationen borde vara

$$\Delta u - u^3 - 2u = 0.$$

Då multiplicerar vi ekvationen med u och integrerar:

$$-\int |\nabla u|^2 dx = \int (u^4 + 2u^2)\, dx$$

$\Rightarrow$ $u = 0$.

Mitt fel ska kompenseras!

Förlåt!!

2. Om vi [illegible]

kanoniska formen med variabelbytet
$\xi = x+2t$, $\eta = x-2t$, so har vi

$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi} = 0$, Så

u_ξ är oberoende av η, u_η är oberoende av ξ.

u_ξ är konstant längs linjerna $\xi =$ konst,
u_η är konstant längs linjerna $\eta =$ konst.

I variabler x, t, betyder detta att
$u_\xi = u_x + 2u_t$ är konstant längs linjerna
$x+2t = c$, $u_\eta = u_x - 2u_t$ är konstant
längs linjerna $x-2t =$ konst.

a.

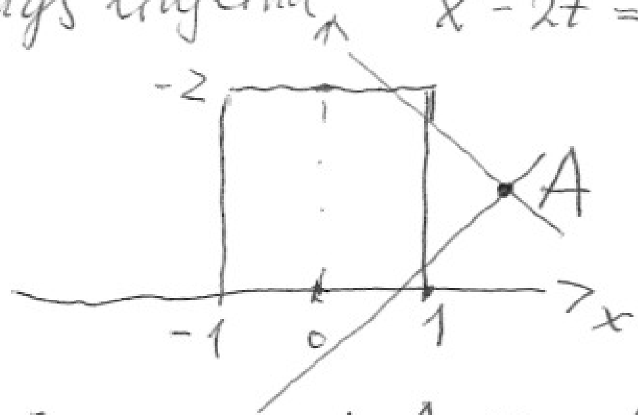
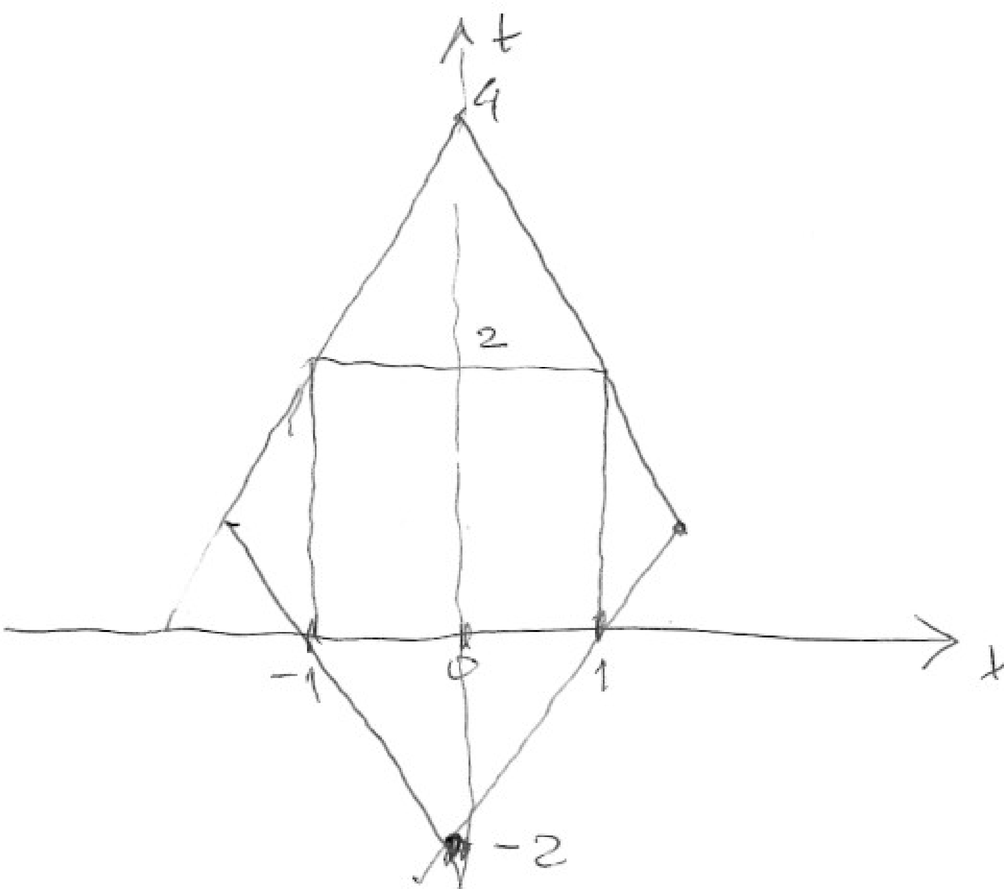


fig. 1

Ta någon punkt A som ligger utanför den givna rektangeln, antar att det finns linjerna $x-2t = c_1$, $x+2t = c_2$ sådana att de passerar genom A och skär rektangeln. Då blir både u_x+2u_t och $u_x-2u_t =$ i A, eftersom dessa uttryck $= 0$ i rektangeln.
Så har vi $u_x = 0$ och $u_t = 0$ i A.
Sådana punkter A fyller en romb, se fig. 2



I den romben $u_x = u_t = 0$, $u = \text{konst.}$, men $u = 0$ i rektangeln, därför $u = 0$ i hela romben

b. Gör variabelbyte $t \mapsto -t$. Då kommer vi till samma vågekvationen $u_{xx} - 4u_{tt}$ i området $t \leq 0$, och $u = 0$ utanför rektangeln $|x| \leq 1$, $-2 \leq t \leq 0$

Funktionen u löser Cauchyproblemet med begynnelsevillkoren

$u(x,-2) = 0$, $u_t(x,-2) = 0$

D'Alembertformeln ger att $u = 0$ överallt.

Antar att det finns 2 olika lösningar, u_1 och u_2. Då skillnaden $u = u_1 - u_2$ satisfierar $u_t - \Delta u + \sum x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ med begynnelsevillkoren $u(0,x) = 0$ och randvillkoren $u(t,x) = 0$, $x \in \partial D$. Ur maxprincipen följer att $u(t,x) \leq 0$ överallt i $(0,T) \times D$. Funktionen $v = -u$ satisfierar densamma ekvation med desamma randvillkoren. Så $v(t,x) \leq 0$, $u(t,x) \geq 0 \Rightarrow u = 0$ överallt, $u_1 = u_2$.

4. Först, låt oss förstå vad som är $x^3 f''$ för en distribution f: för $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle x^3 f'', \varphi \rangle = \langle f'', x^3 \varphi \rangle = -\langle f', (x^3\varphi)' \rangle$$
$$= \langle f, (x^3 \varphi)'' \rangle$$

Nu kollar vi:

a $$\langle \theta, (x^3\varphi)'' \rangle = \int_0^\infty (x^3 \varphi(x))'' \, dx$$
$$= (x^3 \varphi(x))' \Big|_0^\infty = 0$$ ~~eftersom~~ bå

b $$\langle \delta, (x^3\varphi)'' \rangle = (x^3 \varphi(x))'' \Big|_{x=0}$$
$$= 6x\varphi(x) + 6x^2\varphi'(x) + x^3\varphi''(x) \Big|_{x=0} = 0$$

3. $\langle \delta', (x^3\varphi)'' \rangle = -\langle \delta, (x^3\varphi)''' \rangle$

$= -(x^3\varphi)''' \Big|_{x=0} = -\Big[6\varphi(x) + 18x\varphi'(x)$

$+ 9x^2\varphi''(x) + x^3\varphi'''(x)\Big]\Big|_{x=0} = -6\varphi(x) = \langle -6\delta, \varphi \rangle$

$\neq 0$

På liknande sätt

1. $\langle x\delta', (x^3\varphi)'' \rangle = \langle \delta', x(x^3\varphi)'' \rangle$

$= -\langle \delta, (x(x^3\varphi)'')' \rangle = 0$

8: $|x|\delta(x)$ är ej tillåtet, eftersom man endast kan multiplicera en distribution med en glatt funktion.