

TMA690. Partiella differentialekv.

1. Ekvationen $\Delta^2 u_{tt} + u_{tx} - u_{xx} + 1 = 0$ (4)
tillhör hyperboliska typen eftersom

$$D = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < 0 \text{ för alla } x.$$

För att transformera till kanonisk form används standardmetoden av karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 - \mu - \mu^2 = 0$$

som har 2 rötter $\mu_{\pm}$
och i nya koordinater

$$\xi = t + \mu_+ x, \eta = t + \mu_- x$$

transformeras ekvationen till kanonisk form

$$u_{\xi\eta} = 1.$$

Den sista ekvationen löses
med hjälp av D'Alembert metoden.

Spec. fall: $x=0$. Då blir
linjen $t=0$, där Cauchyvillkoren
är angivna, en karakteristisk. Då
löses Cauchyproblemet bara för
några Cauchyvillkor:

$$u_{tx} - u_{xx} + 1 = 0$$

②

$$u(0, x) = \psi(x), \quad u_x(0, x) = \psi'(x) :$$

derivera den första ekvationen i x ,
2 gånger, den andra 1 gång:

$$u_{xx}(0, x) = \psi''(x), \quad u_{tx}(0, x) = \psi'$$

$$\cancel{\psi''} \quad \boxed{\psi' - \psi'' + 1 = 0}$$

nodvändiga och tillr. villkor
för löshet.

2. Låt S_R - sfären med radie R
och centrum i $(0, 0, 1)$; B_2 -klotet
med radie 2. ~~S_R~~ för
och centrum i $(0, 0, 1)$. B_2 och
 S_R , $R \leq 2$ tillhör Ω .

$$2 = \int_{\Omega} |u(x, y, z)| dV \geq \int_{B_2} |u(x, y, z)| dV$$

i sfäriska koordinater: 2

$$\int_{B_2} |u(x, y, z)| dV = \int_0^2 \int_{S_r} |u(x, y, z)| dS dr$$

$$\geq \int_0^2 \int_{S_r} u(x, y, z) dS dr$$

$\geq$ Enligt medelvärdesatsen

$$\int_{S_r} u(x, y, z) dS = |S_r| r^2 u(0, 0, 1)$$

Så

$$2 \geq \int_0^2 |S_r| r^2 u(0, 0, 1) dr$$

$$u(0, 0, 1) \leq \frac{2}{|S_1| \cdot \int_0^2 r^2 dr} = \frac{6}{8|S_1|} = \frac{3}{4\pi}$$

3. Funktionen f tillhör $H^1(B_r)$ ⑧

om $f \in L_2$ och första derivator av f tillhör L_2 . För positiva ε , har vi

$\ln(1+r^\varepsilon) \sim r^\varepsilon, r \rightarrow 0$. Därför

$f(r) \sim r^{\alpha\varepsilon}, r \rightarrow 0$. Så, tillhör

$f \in L_2$ om $\alpha\varepsilon > -\frac{1}{2}$, $n=1$ och

$\alpha\varepsilon > -1$, $n=2$. Av derivator,
är det bara $f_r \neq 0$.

$$f_r = \frac{\varepsilon r^{\varepsilon-1}}{1+r^\varepsilon} \ln^{\alpha-1}(1+r^\varepsilon) \sim r^{\varepsilon\alpha-1}, r \rightarrow 0.$$

Därför, $f_r \in L_2$ om $\varepsilon\alpha-1 > -\frac{1}{2}$, $n=1$

och $\varepsilon\alpha-1 > -1$, $n=2$.

4. Enligt Poissonformel,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} - \frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

Så, $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} - \frac{(x-y)^2}{4t}} dx dy$$

Vi gör variabelbyte $x - y = \xi$

5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, \frac{1}{4t}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y-4y^2} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi$$

Den sista integralen = 1,

$$\text{Så} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y-4y^2} dy.$$