

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3; 4,5 HP. (3 gamla p.)OBS! Ange **kurskod**, namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Transformera ekvationen $\alpha^2 u_{tt} + u_{tx} - u_{xx} + 1 = 0$ till kanoniska formen. Låt $\phi(x)$, $\psi(x)$ vara glatta funktioner med begränsade derivator. Lös Cauchyproblemet för den ekvationen med Cauchydata $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Analysera om det finns speciella värden av α för vilka problemet inte är lösbart för godtyckliga $\phi, \psi(x)$ (8p)
2. Formulera medelvärdesatsen för harmoniska funktioner. Låt $u(x, y, z)$ vara en harmonisk funktion i området $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Antar att vi vet att $\int_{\Omega} |u(x, y, z)| dV = 2$. Hitta sådant tal C att $|u(0, 0, 1)| \leq C$. Ju mindre C du hittar desto fler poäng. (8p)
3. Definiera Sobolevrum H^1 . Vad betyder att rummet är fullständigt? Avgör för vilka reella α och positiva ϵ funktionen $f(x) = \ln^{\alpha}(1 + r^{\epsilon})$ tillhör $H^1(B_1)$ där $r = |x| = \sqrt{\sum x_k^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ och B_1 är det enhetsklotet $|x| < 1$ i $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$. (6p)
4. Låt $u(x, t)$ vara en begränsad lösning till Cauchyproblemet

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^{-x-4x^2}.$$

$$\text{Hitta } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} u(x, t) dx. \quad (6p)$$

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (11p)
6. Berätta så mycket du kan om potentialteori för Laplaceekvationen. (11p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 13. sept. Lösningförslag publiceras på kursens webbsida (år 06-07) 03.sept. Ev. granskning torsdagen, 14. sept, 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum

GR