TMA 690
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F
Datum: 2006-08-21, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Karin Kraft, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=xe^{-2y}. \qquad \text{(6p)}$$

2. Låt Ω vara enhetsskivan och $\gamma=\partial\Omega$ vara enhetscirkeln $\{x=\cos\theta,\ y=\sin\theta:\ \theta\in[0,2\pi]\}$.

(a) Bestäm antalet lösningar till vart och ett av nedanstående problem (n är den utåtriktade enhetsnormalen till γ). Motivera! (6p)

$$\begin{cases}\Delta u=0 \ \text{ i } \ \Omega,\\ u|_\gamma=1;\end{cases} \quad \begin{cases}\Delta u=0 \ \text{ i } \ \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial n}|_\gamma=1;\end{cases} \quad \begin{cases}\Delta u=0 \ \text{ i } \ \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial n}|_\gamma=0;\end{cases} \quad \begin{cases}\Delta u=0 \ \text{ i } \ \Omega,\\ u|_{\theta\in[0,\pi)}=1,\\ u|_{\theta\in[\pi,2\pi)}=0.\end{cases}$$

(b) Bestäm $u(0,0)$ för de problem ovan som har entydig lösning u. (4p)

3. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega\in C^2$. Betrakta Steklovs egenvärdesproblem för den biharmoniska operatorn Δ^2 (där $\Delta^2 u=\Delta(\Delta u)$)

$$\begin{cases}\Delta^2 u=0 \quad \text{i} \quad \Omega,\\ u=0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega,\\ \Delta u=\lambda\frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{på} \quad \partial\Omega,\end{cases}$$

där n är den utåtriktade enhetsnormalen till $\partial\Omega$. Talet λ kallas Steklovegenvärde om problemet ovan har en icke-trivial (klassisk) lösning. Visa att alla Steklovegenvärden är positiva. (Du kan ta för givet att det finns Steklovegenvärden.) (8p)

4. Låt u vara en lösning till vågekvationen

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad \text{i} \quad \{(x,t): x\in\mathbb{R},\ t>0\}.$$

(a) Visa att au_x+u_t är konstant på karakteristikorna $x+at=c$ och au_x-u_t är konstant på karakteristikorna $x-at=c$. (4p)

(b) Använd resultatet ovan för att visa att Cauchys problem för $u_{tt}=a^2u_{xx}$ i $\{(x,t): x\in\mathbb{R},\ t>0\}$ har högst en lösning. (6p)

5. Visa att Cauchys problem för värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

har högst en lösning som är begränsad för $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. (8p)

6.(a) Ange variationsformuleringen för Dirichlets problem med homogena randvillkor för Laplaces operator för ett område i $\mathbb{R}^2$. (2p)

(b) Ange motsvarande variationsformulering för FEM. Förklara varför det problemet alltid är lösbart. (3p)

(c) Formulera en a priori feluppskattning för FEM-lösningen i max-norm (utan bevis). (3p)

/JM