

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2000-04-20 kl 8.45 - 11.45

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Henrik Olsson, 0740 - 45 90 22 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

=====

1. Bestäm en ekvation för det plan, som innehåller linjen $(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(3, 2, -6)$, och är vinkelrätt mot planet $2x + y + 3z = 5$.

2. Låt tre vektorer i $\mathbf{R}^4$ vara givna: $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 1)$

a) Visa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende.

b) Bestäm en ON-bas för det underrum av $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

c) Beräkna ortogonala projektionen av $\mathbf{v}_3$ på detta underrum.. (8 p)

3. Lös matrisekvationen $AXB = C - 2XB$, där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Vilken typ av kurva representerar ekvationen $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5$ (ON-bas)? Undersök detta genom ett lämpligt basbyte. Skissera också kurvan i det gamla koordinatsystemet.

5. a) Visa att $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ är matrisen (i en ON-bas) för spegling av rummet i ett plan,

och ange en ekvation för detta plan (antas gå genom origo).

Ledning: Vilken roll spelar matrisens egenvektorer?

b) Bestäm matrisen för ortogonalprojektion på samma plan. (Obs! Denna uppgift kan lösas utan att man använder planets ekvation!) (7 p)

6. Låt V vara det linjära rummet av alla polynom (med reella koefficienter). Gör V till ett euklidiskt rum genom att definiera en skalärprodukt, som är sådan att polynomen x och $2 - 3x$ är inbördes ortogonala. Bestäm också en ON-bas (samma skalärprodukt) för underrummet av alla polynom av grad högst 2.

7. a) Vad menas med en *ortogonal matris*?

b) Bevisa att determinanten för en ortogonal matris alltid är 1 eller -1.

c) Bevisa att produkten av två ortogonala matriser av samma typ också är ortogonal.

(5 p)

8. a) Formulera *dimensionssatsen* för en linjär avbildning $F: V \rightarrow W$ (linjära rum).

b) Definiera *egenvektor* till en linjär avbildning (eller till en matris).

c) Bevisa att λ är ett egetvärde till matrisen A om och endast om λ är lösning till sekulärekvationen.

/LF

SVAR

1. $12x - 21y - z + 1 = 0$

2. b) En ON-bas: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1, 0)$.

c) $\frac{1}{3}(-2, 1, 1, 0)$

3) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4) En ellips med halvaxel $= 1$ i riktningen $(1, 2)$ och halvaxel $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ i riktningen $(-2, 1)$.

5) a) Spegling i planet $x - y + 2z = 0$.

b) Projektionsmatris: $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

6) ON-bas för $P_2(\mathbf{R})$: $e_1(x) = \sqrt{3}x$, $e_2(x) = 2 - 3x$, $e_3(x) = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$.